ರಾಜ್ಯ ವಿದ್ಯಾ, ಪರಿಶೋಧನ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಸ್ಥೆ
ತೆಲಂಗಾಣ ಹೈದರಾಬಾದು.

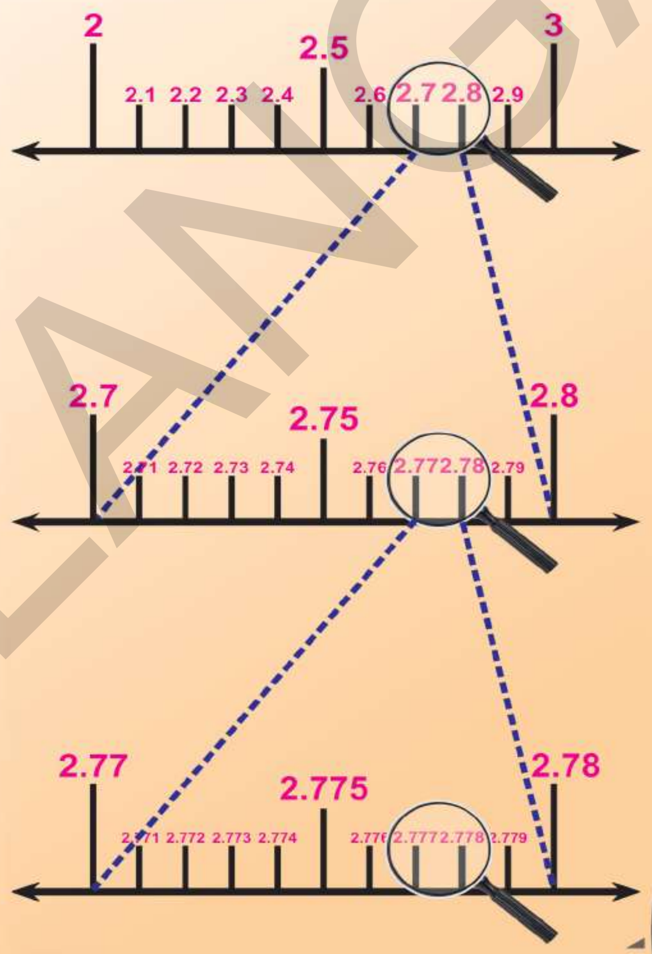
ಗಣಿತ
ತರಗತಿ - IX

FREE

ಗಣಿತ

MATHEMATICS
Class IX
Kannada Medium

ತರಗತಿ - IX



ಪ್ರಚುರಣೆ :
ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರ, ಹೈದರಾಬಾದು.

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದ ಉಚಿತ ವಿತರಣೆ

ಮಕ್ಕಳೇ! ನಿಮಗಾಗಿಯೇ ಈ ಸೂಚನೆಗಳು . . .

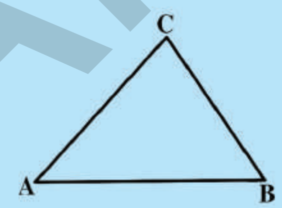
- ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಭಾವನೆ ತಿಳುವಳಿಕೆಗಾಗಿ ಸಂದರ್ಭ ಇಲ್ಲವೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಆಟಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚಿತ್ರಗಳು/ಪಟಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪಟದೊಂದಿಗೆ/ಚಿತ್ರಗಳೊಂದಿಗೆ ಓದಿ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು.
- ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಬರುವ ಅನುಮಾನಗಳನ್ನು ತಕ್ಷಣವೇ ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರನ್ನು ಕೇಳಿ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಭಾವನೆ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಱಇವು ಮಾಡಿರಿಱ ಯಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಸ್ವಂತವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಬಿಡಿಸಲು ಕಷ್ಟವಾದರೆ ಮಾದರಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇಲ್ಲವೇ ಶಿಕ್ಷಕರನ್ನು , ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಱಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿಱ ಶೀರ್ಷಿಕೆ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ನಿಮ್ಮ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಚುರುಕುಗೊಳ್ಳಿಸಲು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ನಿಮಗೆ ಆಲೋಚನಾ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವತಃವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲಾಗದಿದ್ದಾಗ ಸಹಪಾಠಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲವೇ ಶಿಕ್ಷಕರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಱಆಲೋಚಿಸಿರಿ- ಚರ್ಚಿಸಿರಿಱನಲ್ಲಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ನಿಮ್ಮ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಆಳವಾಗಿ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಪಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಾ, ಪ್ರಶ್ನಿಸುತ್ತಾ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಅಧ್ಯಾಯದ ಕೊನೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ನೀವು ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಎಲ್ಲಾ ಭಾವನೆಗಳಗೆ ಸಂಬಂಧಸಿದವು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ, ಇವುಗಳನ್ನು ನೀವು ಸ್ವತಃ ಮನೆಕೆಲಸವಾಗಿ ಇಲ್ಲವೇ ವಿರಾಮ ಸಮಯದಲ್ಲಾಗಲೀ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.
- ಱಇವು ಮಾಡಿರಿ, ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ ಱಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಮಕ್ಷಮದಲ್ಲಿ ಯೇ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವರೋ ಅಲ್ಲಿ ನೀವು ಸಮೂಹಗಳಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇವುಗಳ ವರದಿಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಿಗತವಾಗಿ ಬರೆದು ಕೊಡಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿರ್ವಹಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು, ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು , ನಿಮ್ಮ ಪ್ರತಿಸ್ಪಂದನೆಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಿಯೇ ಬರೆಯಿರಿ.
- ನೀವು ಯಾವ ದಿನದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದಿನವೇ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿ ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರ ಹತ್ತಿರ ತಪ್ಪದೇ ಸರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನೀವು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಶೇಖರಣೆಮಾಡಿ ಸ್ವಂತವಾಗೆ ಬಿಡಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಸಹಪಾಠಿಗಳಿಗೆ ತೋರಿಸಿರಿ. ಎಲ್ಲರೂ ಸೇರಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.
- ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಆಟಗಳು, ಪಜಿಲ್ಸ್, ಆಸಕ್ತಿಕರವಾದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಶೇಖರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.
- ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನೀವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಮಸ್ಯಾ ಸಾಧನೆ, ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದು, ಸಾಧನೆಗಳು ಮಾಡುವುದು, ಗಣಿತ ಬಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು, ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು, ಪ್ರತಿನಿಧಿತ್ವಗಳಂತಹ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.
- ಮೇಲಿನ ಗಣಿತ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಎದುರಾದರೆ ಶಿಕ್ಷಕರ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಅದ್ಭುತ ವೃತ್ತ

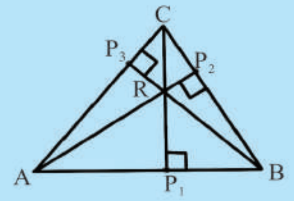
ತ್ರಿಭುಜದಮೇಲೆ ಒಂಬತ್ತು ಬಿಂದುಗಳ ವೃತ್ತ ರಚಿಸುವುದು

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಛೇಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು, ತ್ರಿಭುಜ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ , ಶೃಂಗಗಳಿರುವ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತಾ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ವೃತ್ತವೇ ಅದ್ಭುತ ವೃತ್ತ. ಇದನ್ನೇ ಒಂಬತ್ತು ಬಿಂದುಗಳ ವೃತ್ತ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲಿಗೆ 1765 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಲೆನಾರ್ ಆಯಿಲರ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾನೆ. ಇದನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಿ ಪ್ರಮೇಯ ಪರವಾಗಿ 1882 ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಕಾರ್ಲ್‌ಫ್ಯೂಯರ್ ಬಾಚ್ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದಾನೆ.

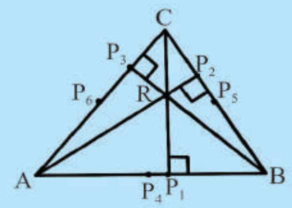
ಈ ಒಂಬತ್ತು ಬಿಂದುಗಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ರಚನಾ ಕೌಶಲ್ಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆ. ಇದನ್ನು ನೀವು ಸ್ವಂತವಾಗಿ ರಚಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳು ಸಹಾಯಪಡುತ್ತವೆ.



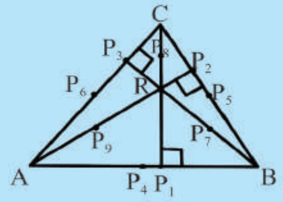
ಒಂದು ದೊಡ್ಡದಾದ ವಿಷಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಳಿ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ΔABC ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.



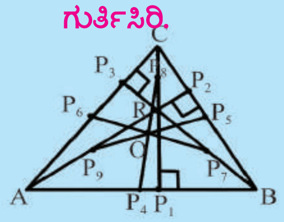
ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಲಂಬಗಳು ಎಳೆದು, ಆ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ P_1, P_2 ಮತ್ತು P_3 ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು R ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.



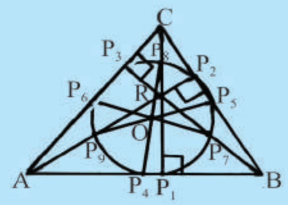
ತ್ರಿಭುಜ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ P_4, P_5 ಮತ್ತು P_6ಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ AB ಮಧ್ಯಬಿಂದು P_4, BC ಮಧ್ಯಬಿಂದು P_5 ಹೀಗೆ ...



BR, CR ಮತ್ತು ARಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು P_7, P_8 ಮತ್ತು P_9 ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ BRಮಧ್ಯಬಿಂದು P_7 , CR ಮಧ್ಯಬಿಂದು P_8 ಹೀಗೆ ...



P_4 ನಿಂದ P_8, P_5ನಿಂದ P_9 ಮತ್ತು P_6 ನಿಂದ P_7 ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಏಕೀಭವಿಸಿಕೊಂಡ ಬಿಂದುವನ್ನು 'O'ಯಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.



'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ OP_1 ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ವೃತ್ತ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 ಮತ್ತು P_8ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ನೀವು ರಚಿಸಿದ ಅದ್ಭುತ ವೃತ್ತ !
ಈ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಕೈವಾರದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸಿಯೇ ಇರುತ್ತೀರಿ.

ಗಣಿತ

9ನೇ ತರಗತಿ

MATHEMATICS

CLASS - IX

(KANNADA MEDIUM)

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಚುರಣಾ ಸಮಿತಿ

ಪ್ರಧಾನ ನಿರ್ವಹಣಾಧಿಕಾರಿ : **ಶ್ರೀ ಎ.ಸತ್ಯನಾರಾಯಣ ರೆಡ್ಡಿ**
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.
ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಪ್ರಧಾನ ವ್ಯವಹಾರ ನಿರ್ವಾಹಕರು : **ಶ್ರೀ ಬಿ.ಸುಧಾಕರ್**
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಮುದ್ರಣಾಲಯ,
ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಪ್ರಭಾರಿ ನಿರ್ವಹಣಾಧಿಕಾರಿ : **ಡಾ.ಎನ್.ಉಪೇಂದರ್ ರೆಡ್ಡಿ** ಪ್ರೊಫೆಸರ್,
ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಮತ್ತು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ವಿಭಾಗ,
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ., ಹೈದರಾಬಾದು

ಅಧ್ಯಕ್ಷರು, ಗಣಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರ, ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆ, ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಕಮಿಟಿ

ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ವಿ. ಕನ್ನನ್

ಗಣಿತ – ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಹೈದರಾಬಾದ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ.

ಪ್ರಮುಖ ಸಲಹೆಗಾರರು

ಶ್ರೀ ಚುಕ್ಕಾ ರಾಮಯ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ತಜ್ಞ ,
ತೆಲಂಗಾಣ, ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಡಾ|| ಹೆಚ್.ಕೆ.ದಿವಾನ್
ಶಿಕ್ಷಣ ಸಲಹೆಗಾರರು, ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ,
ಉದಯಪೂರ್, ರಾಜಸ್ಥಾನ್.

ಮುದ್ರಣ

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದ ಪ್ರಚುರಣೆ, ಹೈದರಾಬಾದ್

ಕಾನೂನನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ
ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಿ

ಶಿಕ್ಷಣದಿಂದ ಬೆಳೆಯಿರಿ.
ವಿನಯಶೀಲರಾಗಿ ನಡೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

First Published 2013

New Impressions 2014, 2015, 2017, 2018, 2019, 2020

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದ ಉಚಿತ ವಿತರಣೆ 2020-21

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

— o —

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಸಮಿತಿ

ಸದಸ್ಯರು

ಶ್ರೀ ತಾತ ವೆಂಕಟ ರಾಮ್ ಕುಮಾರ್
ಮುಖ್ಯ ಗುರುಗಳು,ಜಡ್.ಪಿ.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್,ಮುಲುಮೂಡಿ, ನೆಲ್ಲೂರು.

ಶ್ರೀ ಸೋಮ ಪ್ರಸಾದ್ ಬಾಬು
ಪಿ.ಜಿ.ಟಿ ,ಎ.ಪಿ.ಟಿ.ಡಬ್ಲ್ಯು.ಆರ್.ಎಸ್,.ಚಂದ್ರಶೇಖರಪುರಂ,ನೆಲ್ಲೂರು

ಶ್ರೀ ಕೊಮಂದೂರಿ ಮುರಳಿ ಶ್ರೀನಿವಾಸ್
ಪಿ.ಜಿ.ಟಿ ,ಎ.ಪಿ.ಟಿ.ಡಬ್ಲ್ಯು.ಆರ್.ಸ್ಕೂಲ್ ಆಫ್ ಎಕ್ಸಲೆನ್ಸ್,ಶ್ರೀಶೈಲಂ.

ಶ್ರೀ ಪಡಾಲ ಸುರೇಶ್ ಕುಮಾರ್
ಎಸ್.ಎ,ಜಿ.ಎಚ್.ಎಸ್,ವಿಜಯ್‌ನಗರ್ ಕಾಲೋನಿ,ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಶ್ರೀ ಪಿ.ಡಿ.ಐ.ಗಣಪತಿ ಶರ್ಮ
ಎಸ್.ಎ,ಜಿ.ಎಚ್.ಎಸ್,ಜಮಿಸ್ತಾನ್‌ಪುರ್,ಮಣಿಕೇಶ್ವರ್ ನಗರ್,ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಶ್ರೀ ದುಗ್ಗರಾಜು ವೇಣು
ಎಸ್.ಎ,ಯು.ಪಿ.ಎಸ್,ಅಲ್ಲವಾಡ,ಚೇವೆಳ್ಲ ಮಂಡಲ್ ,ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ .

ಶ್ರೀ ಪಿ.ಅಂತೋನಿ ರೆಡ್ಡಿ
ಮುಖ್ಯ ಗುರುಗಳು,ಸೇಂಟ್ ಪೀಟರ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ,ಆರ್.ಎನ್.ಪೇಟ,ನೆಲ್ಲೂರು.

ಶ್ರೀ ಡಿ.ಮನೋಹರ್
ಎಸ್.ಎ,ಜಡ್.ಪಿ.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್,ಬ್ರಾಹ್ಮಣಪಲ್ಲಿ,ತಾಡ್ವಾಯಿ ಮಂಡಲ್,ನಿಜಾಮಾಬಾದ್

ಶ್ರೀ ಗೊಟ್ಟುಮುಕ್ಕಲ ಬಿ.ಎಸ್.ಎನ್.ರಾಜು
ಎಸ್.ಎ.,ಮುನ್ಸಿಪಲ್ ಹೈಸ್ಕೂಲ್,ಕಸ್ಪ,ವಿಜಯನಗರಂ.

ಶ್ರೀ ಕೆ.ವರದ ಸುಂದರ್ ರೆಡ್ಡಿ
ಎಸ್.ಎ,ಜಡ್.ಪಿ.ಪಿ.ಹಚ್.ಎಸ್,ತಕ್ಕಶಿಲ,ಅಲಂಪೂರ್‌ಮಂಡಲ,ಮಹಬೂಬ್‌ನಗರ್.

ಶ್ರೀ ಅಬ್ಬರಾಜು ಕಿಶೋರ್
ಎಸ್.ಜಿ.ಟಿ ,ಎಂ.ಪಿ.ಯು.ಪಿ.ಎಸ್.,ಚಮಳ್ಲಮುಡಿ,ಗುಂಟೂರ್.

ಶ್ರೀ ಅನಂತ ರೆಡ್ಡಿ
ನಿವೃತ್ತ ಮುಖ್ಯ ಗುರುಗಳು ,ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ

ಶ್ರೀ ಎಂ.ರಾಮಾಂಜನೇಯುಲು
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು,ಸರ್ಕಾರಿ ಡಯಟ್,ವಿಕಾರಬಾದ್,ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ.

ಶ್ರೀ ಎಂ.ರಾಮಾಚಾರಿ
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು,ಸರ್ಕಾರಿ ಡಯಟ್,ವಿಕಾರಬಾದ್,ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ.

ಡಾ.ಎ.ರಾಂಬಾಬು
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು,ಸರ್ಕಾರಿ ಸಿ.ಟಿ.ಇ,ವರಂಗಲ್.

ಡಾ.ಪೂಂಡ್ಲ ರಮೇಶ್
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು,ಸರ್ಕಾರಿ ಐ.ಎ.ಎಸ್.ಇ,ನೆಲ್ಲೂರ್.

ವರದಿಗಾರರು

ಡಾ.ಎಸ್.ಸುರೇಶ್‌ಬಾಬು
ಪ್ರೊಫೆಸರ್,ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ,
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.,ಹೈದರಾಬಾದ್

ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ಎನ್.ಸಿ.ಹೆಚ್.ಪಟ್ಟಾಭಿ ರಾಮಾಚಾರ್ಯುಲು
ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರೊಫೆಸರ್,ಎನ್‌ಇ.ಟಿ.,
ವರಂಗಲ್.

ಡಾ. ಕೆ.ಬ್ರಹ್ಮಯ್ಯ
ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರೊಫೆಸರ್,
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.,ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ವಿ.ಶಿವ ರಾಂಪ್ರಸಾದ್
ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರೊಫೆಸರ್,
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವಿಭಾಗ
ಉಸ್ಮಾನಿಯಾವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ,ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಡಾ.ಎ.ಪದ್ಮನಾಭಂ
ನಿವೃತ್ತ
H.O.D ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವಿಭಾಗ
ಮಹಾರಾಣಿ ಕಾಲೇಜ್,ಪದ್ದಾಪುರಂ

Dr. ಜಿ.ಎಸ್.ಎನ್. ಮೂರ್ತಿ
ನಿವೃತ್ತ ರೀಡರ್, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವಿಭಾಗ
ರಾಜಾ R.S.R.K.R.R ಕಾಲೇಜ್, ಬೊಬ್ಬಿಲಿ,

ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿಗಳು

ಶ್ರೀ ಕಾಕುಳವರಂ ರಾಜೇಂದರ್ ರೆಡ್ಡಿ
ಕೋ-ಆರ್ಡಿನೇಟರ್ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳು, ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.,ಹೈದರಾಬಾದ್

ಶ್ರೀ ಕೆ.ಕೆ.ವಿ.ರಾಯಲು
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, IASE, ಮಾಸಾಬ್ ಟ್ಯಾಂಕ್, ಹೈದರಾಬಾದ್

ಕನ್ನಡ ಅನುವಾದಕರು

ಶ್ರೀ ಟಿ.ಎಸ್.ಹನುಮಂತರಾಯಪ್ಪ SA
ZPHS,ಡಿ.ಹಿರೇಹಾಳ್, ಅನಂತಪುರಂ

ಶ್ರೀ ಡಿ.ಪ್ರಭಾಕರ SA
ZPHS,H.ಸಿದ್ದಾಪುರಂ, ಅನಂತಪುರಂ.

ಶ್ರೀಮತಿ ಜೆ.ಜಯಶ್ರೀ SA,
ZPHS,ಡಿ.ಹಿರೇಹಾಳ್, ಅನಂತಪುರಂ

ಶ್ರೀ ಸಿ. ನಾಗರಾಜ್ ಎಸ್.ಎ.
ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣ ಮಹಬೂಬನಗರ.

ಶ್ರೀ ಸೋಮನಾಥ್ ರೆಡ್ಡಿ ಎಸ್.ಎ.
ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣ ಮಹಬೂಬನಗರ.

ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಹಾಯ ಸಮಿತಿ ಸದಸ್ಯರು

ಶ್ರೀ ಇಂದರ್ ಮೋಹನ್ ಶ್ರೀ ಯಶ್ವಂತ್ ಕುಮಾರ್ ಧವೆ ಶ್ರೀ ಹನಿಫ್ ಪಾಲಿವಾಲ್ ಶ್ರೀ ಆಶಿಷ್ ಚೌರ್ಧಯಾ
ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ,ರಿಸೋರ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್,ಉದಯಾಪೂರ್, ರಾಜಸ್ಥಾನ್.

ಶ್ರೀ ಶರಣ್ ಗೋಪಾಲ್ ಕುಮಾರಿ ಎಂ.ಅರ್ಚನ ಶ್ರೀ ಪಿ.ಚಿರಂಜೀವಿ
ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವಿಭಾಗ, ಹೈದರಾಬಾದ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ

ಶ್ರೀಮತಿ ನೀರಜ
G.P.S., CPL,ಅಂಬರ್‌ಪೇಟ್, ಹೈದರಾಬಾದ್

ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ವಿನ್ಯಾಸ ಸಮಿತಿ

ಶ್ರೀ ಪ್ರಶಾಂತ್ ಸೋನಿ ಶ್ರೀ ಷೇಕ್ ಷಕೀರ್ ಅಹ್ಮದ್ ಶ್ರೀ ಎಸ್.ಎಂ.ಇಕ್ರಂ
ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ,ರಿಸೋರ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್,ಉದಯಾಪೂರ್, ರಾಜಸ್ಥಾನ್.

Êïáá®ïáw

ಮಾನವನ ವಿಕಾಸಕ್ಕೆ, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧವಾದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ವಿದ್ಯೆ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮೂಲಾಧಾರ .ವಿದ್ಯೆಗಿರುವ ಈ ಅದ್ಭುತವಾದ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮುನ್ನಡೆಯುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾಜಗಳು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ವಿದ್ಯೆಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಗುಣಾತ್ಮಕ ವಿದ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುವುವ ಮನಸ್ತತ್ವದಿಂದ ಮುಂದೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಲು ಸೆಕೆಂಡರಿ ವಿದ್ಯೆಯನ್ನು ಸಹ ಸಾರ್ವಜನೀಯಗೊಳಿಸುವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕೋನ್ನತ ಮಟ್ಟದವರೆಗೂ ಕಲಿತ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸಮ್ಮಿಶ್ರಿತ ಗೊಳಿಸಿ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸುವಂತೆ, ಪ್ರೌಢ ಶಿಕ್ಷಣವು ಸಹಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೇತು ಬದ್ಧವಾಗಿ ಕಲಿಯಲು, ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಪರಿಹರಿಸುವುದು, ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದನ್ನು ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವೆಂಬುದು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಬೋಧನಾ ವಿಷಯ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿ ವಿಷಯದೊಂದಿಗೆ ಅವಿನಾಭಾವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಕಾರಣಗಳಿಂದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡಲು ಸಹಕರಿಸುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲರೂ ಗಣಿತವನ್ನು ಸಂತೋಷದಿಂದ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುವುದಲ್ಲದೇ, ಆವರ ಜೀವನದ ಆನುಭವಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವದಲ್ಲಿನ ಮೂಲ ಅಂಶಗಳು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾನು ಪ್ರಭಲವಾಗಿ ನಂಬಿದ್ದೇನೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತವನ್ನು ಅಂಕೆಗಳ ಸಾಧನೆಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮಿಳಿತಗೊಂಡಿರುವ ಅಮೂಲ್ಯ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತು ಕೊಳ್ಳುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಬೋಧನಾ ಅಭ್ಯಸನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಭಾಗವಾಗಿ ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲೂ, ಎಲ್ಲಾ ಮಟ್ಟದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಲುದಾರರಾಗುವಂತೆ ಶ್ರಮವಹಿಸಬೇಕು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಮೂಡಿಸಿ, ಅವರಲ್ಲಿ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸ ಬೆಳೆಯುವಂತೆ ಬೋಧನೆಯು ಮುಂದುವರೆದಲ್ಲಿ ಅದು ಅವರ ಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಗುರಿಸಾಧನೆಗೆ ದಾರಿ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಈ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯ ಕಾಯ್ದೆ (SCF - 2011) ಯ ವಿಶಾಲ ಮನ ಸ್ತತ್ವಕ್ಕೆ ಆನುಗುಣವಾಗಿ ರೂಪಿಸಿದ ಗಣಿತ ಆಧಾರ ಪತ್ರದಲ್ಲಿನ ಆಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವು ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಸಹಕರಿಸುವಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ.

ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಆಕರ್ಷಣೀಯವಾಗಿ, ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ಸರಿ ಹೊಂದಿಸುವಲ್ಲಿ ಅವಿಶ್ರಾಂತ ಶ್ರಮವಹಿಸಿದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಂಡಳಿ ಸದಸ್ಯರಿಗೆ, ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರೂಪಿಸುವಲ್ಲಿ ಭಾಗಿಗಳಾದ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರಿಗೆ ಆಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ, ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಪರಿಶೋಧನಾ ಸಂಸ್ಥೆಯು ಅಭಿನಂದಿಸುತ್ತದೆ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಇಲಾಖಾ ಪರವಾಗಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಜಿಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾ ಶಾಖಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಮಂಡಲ ಶಿಕ್ಷಣಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಪಾಠ ಶಾಲೆಯ ಮುಖ್ಯೋಪಾಧ್ಯಾಯರುಗಳಿಗೆ ಧನ್ಯವಾದಗಳನ್ನೂ ತಿಳಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಮುಂದೆ ನಿಂತು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಿದ ಕಮೀಷನರ್‌ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಪಾಠಶಾಲೆ ವಿದ್ಯೆ, ಆಂಧ್ರ ಪ್ರದೇಶರವರಿಗೂ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ ಉದಯ ಪುರ,' ರಾಜಾಸ್ಥಾನರವರಿಗೂ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಮುಂಬರುವ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತಷ್ಟು ಮೌಲ್ಯಧಾರಿತವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡೆಯಲು ನಿಮ್ಮೆಲ್ಲರ ಸಲಹೆ ಸೂಚನೆಗಳು ನಿಮ್ಮಿಂದ ಆಹ್ವಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ಥಳ : ಹೈದರಾಬಾದ್

ದಿನಾಂಕ : ಡಿಸೆಂಬರ್ 26, 2012

ಸಂಚಾಲಕರು

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಇಲಾಖೆ

ಹೈದರಾಬಾದ್.

ವಿದ್ಯಾ ಪ್ರಣಾಳಿಕಾ ಕಾಯ್ದೆ (SCF - 2011) ಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಅನೇಕ ಸಿಫಾರಸುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾದ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಲಿಕೆ, ಪಾಠಶಾಲೆ ಹೊರಗಿನ ಜೀವನದೊಂದಿಗೆ ಮಿಳಿತಗೊಂಡಬೇಕು, ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರವು ಎಲ್ಲ ತರಗತಿಗಳಿಗೂ ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯನ್ನು ಸರಿ ಪಡಿಸಲು ನಿರ್ಣಯಿಸಿದೆ.
ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕಿನ ಕಾಯ್ದೆಯ (RTE - 2009) ಪ್ರಕಾರ 14 ವರ್ಷ ವಯಸ್ಸಿನವರೆಗೂ ಶಾಲೆಗೆ ಸೇರಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಗುವೂ, ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ತಪ್ಪದೇ ಪಡೆಯಲು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸ್ಥಾಯಿಯಲ್ಲಿ ರೂಪೊಂದಿಸಿದ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಪ್ರಕಾರ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಹ ಗಣಿತ, ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಜಿಲ್ಲೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಯಿ, ಅರ್ಹತೆ, ಪ್ರವೇಶ ಪರೀಕ್ಷೆಗೋಸ್ಕರ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಹ ಸಿದ್ದಗೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಮಾರ್ಪಾಡು ಸೇರ್ಪಡೆಗಳು ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ. ಅವಶ್ಯತೆಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ತಾಂತ್ರಿಕ , ವಿಜ್ಞಾನ ರಂಗಗಳ ಅಭಿವೃದ್ದಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಬಲಿಷ್ಟವಾದ ತಾಂತ್ರಿಕ ಯುಗಕ್ಕೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಸಿದ್ದಮಾಡಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ.

ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯು ಮೂರು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ, ಪ್ರಾಥಮಿ ಕೋನ್ನತ, ಮತ್ತು ಪ್ರೌಢ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಂತಗಳ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಡಿಯಲ್ಲಿ, ಚಕ್ರೀಯ ಪದ್ದತಿಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿದೆ. ಪ್ರೌಢ ಶಾಲಾ ಹಂತಯಲ್ಲಿ, ಗಣಿತ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಉನ್ನತ ತರಗತಿಗಳ ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯಾ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಧ್ಯಾಯನ ಮಾಡಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ, ಪ್ರಾಥಮಿಕೋನ್ನತ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಗಣಿತ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು, ಅನ್ವಯಿಸಲು ಮತ್ತಷ್ಟು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ಸಹಿಕರಿಸಬೇಕು.

ಪಾಠ್ಯ ವಿಷಯಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮೂಲ ಭೂತ ಗಣಿತದ ಅಂಶಗಳು, ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಅನ್ವೇಷಣೆ, ತಿಳುವಳಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ಆಧರಿಸಿ ಊಹಿಸಿದ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಿರ್ಮಾಣ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಚುರುಕಿನಿಂದ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಂತೆ ಸಮವಯಸ್ಕರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವಂತೆ, ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಸ್ತುತ 9ನೇ ತರಗತಿ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಪರಿಶೋಧನೆ ಸಂಸ್ಥೆಯವ ರಿಂದ ರೂಪಿಸಿರುವ ಗಣಿತ ವಿದ್ಯಾಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯನ್ನು, ಶಿಕ್ಷಣ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕೊಂಡು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ.
ಈ ತರಗತಿಯ ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಆರು ಮುಖ್ಯರಂಗಗಳೆಂದರೆ, 1) ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆ 2) ಬೀಜಗಣಿತ 3) ರೇಖಾಗಣಿತ 4) ಕ್ಷೇತ್ರ ಗಣಿತ 5) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ 6) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎಂಬ ರಂಗಗಳಾಗಿದ್ದು ನಿರ್ದೇಶಿತ ಸ್ಥಾಯಿಯಲ್ಲಿ ರೂಪೊಂದಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.
ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳು ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಳ್ಳೆಯ ಸ್ವೇಚ್ಛಾ ವಾತಾವರಣದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಬೃಂದಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ, ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ 'ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ', 'ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ' ವಂತಹ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟತೆಗಳು :

• ಪಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ರೂಪಿಸಿದ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಟರ್ಮಿನಲ್ಲೂ ವಿವಿಧ ರಂಗಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಶಗಳು ಕಲಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೀಕರಣ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

• ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಭಾವನೆಗಳು ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರಾಥಮಿಕೋನ್ನಕ ಹಂತದವರೆಗೂ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಹಜ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಲೋಚನಾ ದೃಷ್ಟಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಅಳೆಸುವುದು, ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಮಾಡವಂತಹ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಕಲ್ಪಿಸುವಂತಿದೆ ಈ ಹಂತದಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ನಿರ್ವಚಿತ,ಅನಿರ್ವಚಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳು ಅವುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಹೊಸ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಿ ಏರ್ಪಡಿಸಿ ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳ ರಚನೆಗೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಕೈವಾರದ ಬಳಕೆಯು ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಆಕರ್ಷಣೆ.

- ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ, ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳು ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸದಾ ಸಂಪೂರ್ಣ ಮೌಲ್ಯಾಂಕನ ಮಾಡಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಉಪ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದನಂತರ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಾವೇ ಸಾಧಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಅದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಲಿಕೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಅವಕಾಶಕೊಡಲಾಗಿದೆ.
- ಒಟ್ಟು ಪಾಠ್ಯಾಂಶವನ್ನು 15 ಅಧ್ಯಾಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು ಕೂಲಂಕುಷವಾಗಿ, ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಹೇತು ಬದ್ಧವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಲು, ಕಲಿಕಾ ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹಿಡಿತ ಸಾಧಿಸಲು, ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಲಿಯಲು, ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಬೆಳೆಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.
- 'ಬುದ್ದಿವಂತಿಕೆಗೆ ಪರೀಕ್ಷೆ'', ' ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ?' ಎಂಬ ಶೀರ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸೃಜನಾತ್ಮಕತೆ, ಆಲೋಚನಾ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಬಣ್ಣ ಬಣ್ಣದ ವರ್ಣ ಚಿತ್ರಗಳು ಓದು ಬಹುದಾದ ಆಕ್ಷರಗಳ ಗಾತ್ರವು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ಬಗ್ಗೆ ಉತ್ತಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಮೂಡಿಸಿ, ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಕಡೆ ಶ್ರದ್ಧವಹಿಸಲು ಸಹಾಯ ನೀಡುತ್ತವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (1) ರಲ್ಲಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಧಿಯ ಬಗ್ಗೆ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವ ವಿವಿಧ ಪದ್ದತಿಗಳು ಇವೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾವಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪೀನ ದರ್ಪಣದಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಊಹಾಶಕ್ತಿ, ಅಂತರ್ ದೃಷ್ಟಿಗೆ ಅವಕಾಶ ಏರ್ಪಟ್ಟು ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿದೆ

ಅಧ್ಯಾಯ (2) ರಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೌಲಿಕ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ, ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಮೂಲಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಹಾಗೆ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದ್ದಾರೆ. ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯ ಪದವನ್ನು ಏಕೆ ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆಯೋ (ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ) ಕಾರಣ ಸಮೇತ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ಪದ್ದತಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (3) ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಹ ಬೀಜಗಣಿತ ರಂಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸುವ ಅಧ್ಯಾಯ. ವಿವಿಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ನಿತ್ಯಜೀವನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ವಿವಿಧ ಪದ್ದತಿಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳು (ಗ್ರಾಫ್‌ಗಳು) ಮೂಲಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಧನೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಗಣತೀಕರಣ ದಿಶೆಗೆ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರ ವಹಿಸುತ್ತವೆ.

ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಏಳು ಅಧ್ಯಾಯಗಳು (ಅಂದರೆ 3,4,7,8,11,12 ಮತ್ತು 13) ಇವೆ. ಈ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎಲ್ಲಾ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇತುಬದ್ಧವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸುವುದು, ಅಂತರ್ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು, ನಿಜ ಜೀವನ ಸಂಘಟನೆಗಳಿಂದ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಬಹಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ವಿವಿಧ ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳು ಇವೆ. ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಅಭಿವೃದ್ದಿ ಹೊಂದಿದ ವಿಧ, ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಮತಲ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಬರೆದ ಗ್ರಂಥ 'ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳು ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ಚತುರ್ಭುಜಗಳು, ವೃತ್ತಗಳು, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಂತಹ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಚಟುವಟಿಕೆ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಮೆಯಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಸ್ವೀಕೃತಧಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದರು ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಋಜುವಾತು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಭಾರವನ್ನು ತಗ್ಗಿಸಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಗಮನ, ನಿಗಮನ ವಿಧಾನಗಳೊಂದಿಗೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಹಾಗೆ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಇವೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಕೈವಾರ, ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು ನಡೆದಿದೆ. ಇದರಿಂದ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ಖಚ್ಚಿತತ್ವ ಬರುವುದೆಂದು ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು.

ಅಧ್ಯಾಯ (5) ರಲ್ಲಿ ಹೊಸದಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೀಜಗಣಿತ ಆಧಾರವಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಹೊಂದಿವೆಯೋ ಹೇಳುವುದು ಅಲ್ಲದೇ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗುರ್ತಿಸಬಹುದೋ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಅನೇಕ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (9) ರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ, ವರ್ಗೀಕೃತ, ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಶೇಖರಣೆ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆ ವಿಧಾನಗಳಾದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ, ಬಹುಳಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಪದ್ದತಿಗಳನ್ನು ಜೀವಿತ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (14) ರಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎನ್ನುವುದು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಹೊಸ ಅಧ್ಯಾಯ ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಭಾವನೆ ಹೇಗೆ ಏರ್ಪಡುವುದೋ ವಿವಿಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವಕಾಶಗಳಿಗೆ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯೆ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆಯೋ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (10) ರಲ್ಲಿ ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಾಧನೆಗಳು ಎಂಬ ಹೊಸ ಅಧ್ಯಾಯದಿಂದ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗೆ, ಸಾಧಾರಣ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದಲ್ಲದೇ ಒಂದು ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದೋ ಉದಾಹರಣೆಗಲ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ದಗಳು, ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು, ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳು, ಊಹೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ಚಿರ್ಚಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಯಾವ ಪಠ್ಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಾದರೂ ವಿಜಯ ಸಾಧನೆ ಎನ್ನುವುದು ಪಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಶಿಕ್ಷಕನು ಅವಲಂಬಿಸುವ ಭೋಧನಾ ಪದ್ದತಿಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಉತ್ತಮ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಮಾತ್ರವೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾತ್ಮಕವಾದ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ. ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಭೋಧನೆ ಮಾತ್ರವೇ ಪಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಗೆ ಹೊಸ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯ ಬದಲಾಣೆಗಳನ್ನು ತರಬಲ್ಲದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣಿತ ಭೋಧನೆ ಎಂದರೆ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದಲ್ಲದೇ ಮೌಲಿಕ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಅದರ ಮೂಲಕ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ವೃದ್ದಿಸುತ್ತವೆಂದು ಗ್ರಹಿಸಬೇಕು. ಇಂತಹ ಬದಲಾವಣೆ ಗಣಿತ ಭೋಧನಾಭ್ಯಾಸನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಬರಬೇಕೆಂದು ಆಶಿಸೋಣ.

&±ÜsÜÂ±ÜâÓÜPÜ ÃÜaÜ®Ý ÓÜËá£

(ಅನ್ವೇಷಣೆಯಲ್ಲಿನ ಅಧ್ಭುತಗಳು ಚಿಕ್ಕ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಹೊರಬೀಳುತ್ತವೆ)

ರಾಮಾನುಜಮ್ ಎಂಬ ಬಾಲಕ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞರಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬದಲಾದ? ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜಮ್ ಹೊಸ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಉತ್ಸುಕತೆಯನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಿಲ್ಲ. ಚಿಕ್ಕತನದಿಂದಲೇ ತನ್ನ ಪ್ರತಿಭೆ, ಆಲೋಚನೆಗಳಿಂದ ತನ್ನ ಸ್ನೇಹಿತರನ್ನು, ಹಿರಿಯರನ್ನು, ಉಪಾಧ್ಯಾಯರನ್ನು ಆಶ್ಚರ್ಯಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದನು.

ÁYEÌÞ®ÁágEÌå...

ಒಂದು ದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕನು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಾಳೆಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮೂವರಿಗೆ ಹಂಚಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಬಾಳೆಹಣ್ಣು ಬರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಹೇಳಿ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೇಳಿದನು. ರಾಮಾನುಜಮ್ ತಕ್ಷಣವೇ 'ಸಾರ್, ಯಾವ ಒಂದು ಬಾಳೆಹಣ್ಣನ್ನು, ಯಾರಿಗೂ ಹಂಚದಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ?' ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿದನು. ಅಂದರೆ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಭಾಗಾಕಾರ ಲೋಪವನ್ನು ಎತ್ತಿ ತೋರಿಸಿದನು.

$$3=\sqrt{9}=\sqrt{1+8}$$
$$=\sqrt{1+(2\times 4)}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{16}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+15}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+(3\times 5)}}$$

and so on ...

$$\frac{1}{4}+2=\left(1\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3)=\left(2\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5)=\left(5\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5\times 7)=\left(14\frac{1}{2}\right)^2$$

..... and so on.

ರಾಮಾನುಜಮ್ ತನ್ನ ಗಣಿತ ಪ್ರತಿಭೆಯಿಂದ ಎಷ್ಟೋ ಮಂದಿ ಸ್ನೇಹಿತರನ್ನು ಸಂಪಾದಿಸಿದ್ದನು. ಒಂದು ಬಾರಿ ತನ್ನ ಮೇಲಿನ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ "$\sqrt{x}+y=7$ ಮತ್ತು $x+\sqrt{y}=11$, ಆದರೆ x yಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತವೆ" ಎಂದು ಕೇಳಿದ ಕೂಡಲೆ $x = 9$ ಮತ್ತು $y = 4$. ಎಂದು ಉತ್ತರ ಕೊಟ್ಟು ಅವನನ್ನು ಆಶ್ಚರ್ಯಮೂಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ ಒಳ್ಳೆಯ ಸ್ನೇಹಿತನಾದನು.

ಶಾಲೆಯಲಿ ಓದುತ್ತಿರುವ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ, ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡುವ ಮನೆಗೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡುವುದಲ್ಲದೆ ತನಗೆ ಇಷ್ಟವಾದ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಹೊಸ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು, ಆವಿಷ್ಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದನು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್ ರಾಮಾನುಜನ್ ಭಾರತೀಯರು ಹೆಮ್ಮೆ ಪಡುವಂತಹ ಒಬ್ಬ ಗಣಿತ ಮೇಧಾವಿ. ಇವರು ಡಿಸೆಂಬರ್ 22, 1887ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಮಿಳುನಾಡು ರಾಜ್ಯದ "ಈರೋಡ್" ನಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಡಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿ ಜನ್ಮಿಸಿದರು. ಬಾಲ ಮೇಧಾವಿಯಾದ ರಾಮಾನುಜನ್ 13 ನೇ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ "ಲೋನಿಸ್ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ"ಯನ್ನು ಕರತಲಾಮಲಕ ಮಾಡಿಕೊಂಡರು. ತನ್ನ 15 ನೇ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ತನ್ನ ಸಹಚರ ಸ್ನೇಹಿತರು ಜಾರ್ಜ್‌ಕರ್ ಬರೆದ "ಶುದ್ಧ ಅನುವರ್ತನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಗ್ರಂಥ" (Elementary result in Pure and Applled Mathematics) ಕೊಟ್ಟರೆ ಅದರಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ, ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಬರೆದರು. ತನ್ನ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಚಿತ್ತು ಕಾಗದಗಳ ಮೇಲೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಇಂತಹ ಚಿತ್ತು ಕಾಗದಗಳೇ ನಂತರ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ರಾಮಾನುಜನ್ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವ "ಪ್ರೆಯಿಡ್ ನೋಟ್ ಬುಕ್ಸ್" ಯಾಗಿ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಹೊಂದಿವೆ. ತನಗೆ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕವಾಗಿ ಅರ್ಹತೆ ಪತ್ರ (Degree cirtificate) ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಮದ್ರಾಸ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ಇವರ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ 1913ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ 75 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಉಪಕಾರ ವೇತನವನ್ನು ಮಂಜೂರು ಮಾಡಿತು. ಮತ್ತಷ್ಟು ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರು ಸುಮಾರು 120 ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು, ಅನೇಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಜಿ. ಹೆಚ್.ಹಾರ್ಡಿ (ಕೇಂಬ್ರಿಡ್ಜ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ - ಲಂಡನ್) ಅವರಿಗೆ ಕಳುಹಿಸಿದರು. ಇವುಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ, ಇವುಗಳ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ, ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರನ್ನು ಲಂಡನ್ನಿಗೆ ಆಹ್ವಾನಿಸಿದರು. ಇಂಗ್ಲಾಂಡಿನಲ್ಲಿ ಹಾರ್ಡಿ ಅವರೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿ ರಾಮಾನುಜನ್ ಅನೇಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪದ್ಧತಿ, ಬೀಜಗಣಿತ ಅಸಮೀಕರಣಗಳು, ಧೀರ್ಘ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಉತ್ಪನ್ನಗಳುವಂತಹವು ಬಹಳ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರನ್ನು 1918ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಫೆಲೋ ಆಫ್ ರಾಯಲ್ ಸೊಸೈಟಿ ಯಾಗಿ ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಸರ್ಕಾರ ಗುರ್ತಿಸಿತು. ಫೆಲೋಆಫ್ ಟ್ರಿನಿಟಿ ಕಾಲೇಜ್, ಕೇಂಬ್ರಿಡ್ಜ್ ಕಾಲೇಜುಗಳಿಗೆ ಆಯ್ಕೆಯಾದ ಮೊದಲ ಭಾರತೀಯನಾದರು. ದುರಾದೃಷ್ಟವಾತ್, ರಾಮಾನುಜರ್ ಆರೋಗ್ಯವು ಲಂಡನ್ನಿನಲ್ಲಿ ಕ್ಷೀಣಿಸಿತ್ತು. ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೂ ಅವರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ, ಗಣಿತ ಆಲೋಚನೆಗಳಿಂದ ದೂರವಾಗಲಿಲ್ಲ. ಒಂದು ದಿನ ತನನ್ನು ಪರಾಮರ್ಶಿಸಲು ಬಂದ ಹಾರ್ಡಿ ಕಾರು ನಂಬರು 1729 ನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಇದನ್ನು ಅಸಾಧಾರಣಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ತಿಳಿಸಿದನು. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿ ಹೇಳಿದರು.; $1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$.ದುರಾದೃಷ್ಟವಶಾತ್ ಕ್ಷಯ ವ್ಯಾಧಿ ಸೋಕಿ 26,ಏಪ್ರಿಲ್ 1920. ವರ್ಷದಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ 32 ರ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ) ಮದ್ರಾಸ್‌ನಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಕೊನೆಯುಸಿರು ಎಳೆದರು. ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರ ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರು ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಮೋಘ ಸೇವೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಟಪಾಲು ಚೀಟಿ (Post Stamp) ಮುದ್ರಿಸುವುದಲ್ಲದೇ ಅವರ 125 ನೇ ಜಯಂತಿಯ ಸಂದರ್ಭವಾಗಿ 2012 ವರ್ಷವನ್ನು ಗಣಿತ ವರ್ಷವಾಗಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿತು.

ಪರಿವಿಡಿ

ಪೇಪರ್-I	ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ, ನಿರೂಪಕ ರೇಖಾಗಣಿತ, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ಚತುರ್ಭುಜಗಳು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು
ಪೇಪರ್-II	ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು, ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು , ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನ ಫಲಗಳು, ವೃತ್ತಗಳು, ರೇಖಾಗಣಿತ ರಚನೆಗಳು, ಸಂಭವನೀಯತೆ, ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಾಧನೆಗಳು

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

– ರವೀಂದ್ರನಾಥ ಠಾಗೂರ್

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯ ಹೇ |
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ ||
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧ್ ಗುಜರಾತ ಮರಾಠಾ |
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗಾ ||
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ |
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿ ತರಂಗಾ ||
ತವ ಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ |
ತವ ಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ ||
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯ ಗಾಥಾ |
ಜನಗಣ ಮಂಗಳದಾಯಕ ಜಯ ಹೇ ||
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ |
ಜಯ ಹೇ ! ಜಯ ಹೇ ! ಜಯ ಹೇ ||
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಹೇ |

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಪೈಡಿಮರ್ರಿ ವೆಂಕಟ ಸುಬ್ಬರಾವು

"ಭಾರತ ದೇಶ ನನ್ನ ಮಾತೃಭೂಮಿ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರರು. ವೈವಿಧ್ಯಮಯ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಲಕ್ಷಣವು ನನಗೆ ಅತೀವ ಹೆಮ್ಮೆ ತಂದಿದೆ. ಈ ದೇಶದ ಉನ್ನತ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಮಟ್ಟವನ್ನು ತಲುಪಲು ನಾನು ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇನೆ

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಸುಸಂಪನ್ನವಾದ ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನೂ, ನನ್ನ ತಂದೆ ತಾಯಿಗಳನ್ನೂ, ಉಪಾಧ್ಯಾಯರನ್ನೂ ಎಲ್ಲ ಹಿರಿಯರನ್ನೂ ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೊಡನೆ ಮರ್ಯಾದೆಯಿಂದ ನಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ನನ್ನ ದೇಶದ ಬಗ್ಗೆ ನನ್ನ ಪ್ರಜೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ, ಸೇವಾ ನಿಷ್ಠೆ ಪಡೆದಿರುವೆನೆಂದು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದೇನೆ. ಅವರ ಶ್ರೇಯೋಭಿವೃದ್ಧಿಗಳೇ ನನ್ನ ಆನಂದಕ್ಕೆ ಮೂಲ."

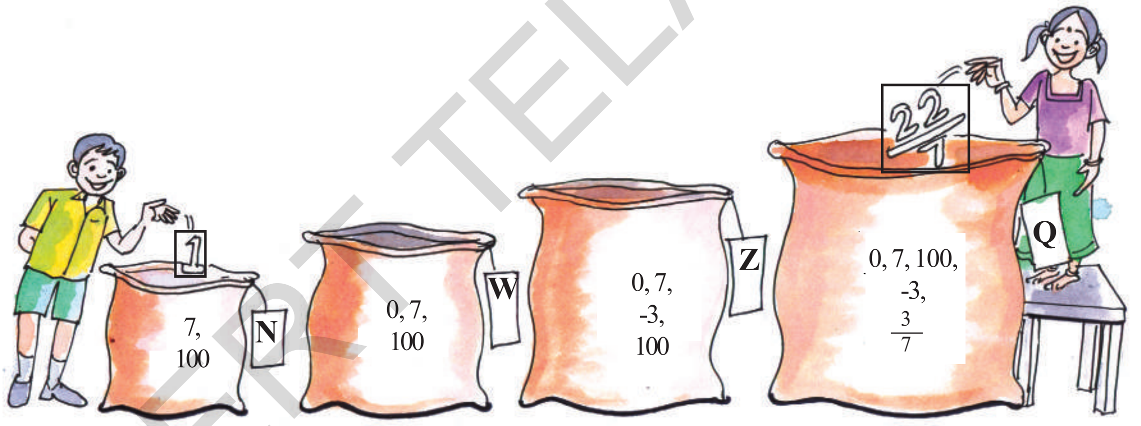
01 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1.1 ಪರಿಚಯ

ನಾವು ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$$7, 100, 9, 11, -3, 0, -\frac{1}{4}, 5, 1, \frac{3}{7}, -1, 0.12, -\frac{13}{17}, 13.222 \ldots, 19, \frac{-5}{3}, \frac{213}{4}, \frac{-69}{1}, \frac{22}{7}, 5.\overline{6}$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತವೆಯೋನಿರ್ಣಯಿಸಿ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಬರೆದು ಅವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚೀಲಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಕಿರಿ. ಸ್ನೇಹ ಮತ್ತು ಜಾನ್‌ರು ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುವವೋ ಆ ಚೀಲಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರು. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚೀಲಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಕಬೇಕಾದಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಾಪಿಗಳನು ಹೆಚು ತಯಾರಿಸಿ ಸಂಬಂಧಿತ ಚೀಲಗಳಲಿ ಹಾಕಿದರು.



N ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು, W ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು, Z ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Q ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

Z ಚೀಲದಲ್ಲಿ, ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು I ಅಥವಾ Z ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರು.

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

ಇದೇ ರೀತಿ p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು $q \neq 0$ ಆದಾಗ $\frac{P}{Q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ Q ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಇವೆ.

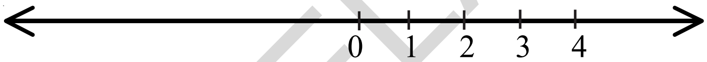
ಇನ್ನು ಚೀಲ N , ಚೀಲ W, ಚೀಲ Z ನಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Q ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಇವೆ.

ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ, ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು $\frac{P}{Q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$.

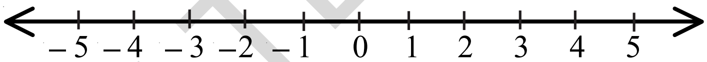
ಉದಾಹರಣೆಗೆ -15 ನ್ನು $\frac{-15}{1}$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ p = -15, q = 1.

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{10}{20}=\frac{50}{100}$ ... ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮನಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು) . ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದೊಂದೇ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{p}{q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು $\frac{p}{q}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆಂದರೆ p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ, $q \neq 0$ ಮತ್ತು p ಮತ್ತು qಗಳಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಅಪವರ್ತನ 1ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವುದೇ ಇತರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದರ್ಥ. (ಅಂದರೆ p, q ಗಳು ಎರಡು.......) ಆದ್ದರಿಂದ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವುದೆಂದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಅನಂತವಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆಂದು ಅರ್ಥ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಮೇಲೆ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ '0' ಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು. '0' ಯ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ 1, 2, 3, 4, … ಗಳನ್ನು ಒಂದು ಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.



ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

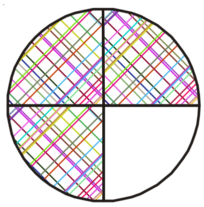


ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸುವರೋ ಒಂದು ಬಾರಿ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

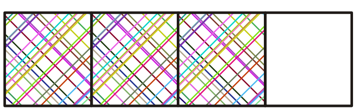
$\frac{3}{4}$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೊ ನೋಡೋಣ.

$\frac{3}{4}$ ರಲ್ಲಿ 3 ಅಂಶ ಎಂದು 4 ಛೇದ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

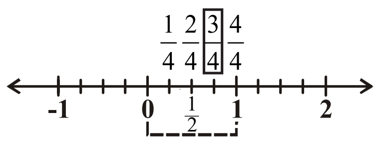
$\frac{3}{4}$ ಎಂದರೆ ಪೂರ್ಣದಲ್ಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $\frac{3}{4}$ ಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರರೂಪಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



$\frac{3}{4}$



(ಚಿತ್ರರೂಪ) $\frac{3}{4}$



(ಸಂಖ್ಯಾರೂಪ)

ಆಲೋಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಚರ್ಚಿಸಿ : ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಬಹುದೇ ?

ಉದಾ:-1: $\frac{5}{3}$ ಮತ್ತು $-\frac{5}{3}$ ಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $-2, -1, 0, 1, 2$ ಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

$\frac{-7}{3}$, $-2\,(=\frac{-6}{3})$, $\frac{-5}{3}$, $\frac{-4}{3}$, $-1\,(=\frac{-3}{3})$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{-1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $1\,(=\frac{3}{3})$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $2\,(=\frac{6}{3})$, $\frac{7}{3}$

'0'ಗೆ ಬಲ ಮತ್ತು ಎಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಮಾನ (ಯೂನಿಟ್)ವನ್ನು ಮೂರು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ. ಇದರಿಂದ 5 ಭಾಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಐದನೇ ಭಾಗ $\frac{5}{3}$ ನ್ನು ಮತ್ತು ಎಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಐದನೇ ಬಿಂದುವು $\frac{-5}{3}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. $\frac{-3}{4}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರಿ. 2. 0, 7, 10, -4 ಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
3. **ನಾನಂದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :** 0 ಯಿಂದ 100 ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಅಂದುಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಅವನಂದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀನು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳುತ್ತಾ ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಲ್ಲೆ? ನೀನು ಕೇಳುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ನಿನ್ನ ಸ್ನೇಹಿತ ಕೇವಲ 'ಹೌದು' ಅಥವಾ 'ಅಲ್ಲ' ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಉತ್ತರಿಸುತ್ತಾನೆ.

ಉದಾ-2: ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದವು ಯಾವುವು? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿವರಿಸಿ

i. ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗುತ್ತದೆ.
ii. ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ.
iii. ಸೊನ್ನೆ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಪರಿಹಾರ : i. ಸರಿಯಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{7}{8}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ.

ii. ಸರಿ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನಾದರೂ $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ −2 ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

(ಯಾವುದಾದರೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'b' ನ್ನು $\frac{b}{1}$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು)

iii. ಸರಿ. ಏಕೆಂದರೆ '0'ಯನ್ನು $\frac{0}{2}, \frac{0}{7}, \frac{0}{13}$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ($\frac{p}{q}$ ರೂಪ, ಇಲ್ಲಿ p,q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$)

('0' ನ್ನು $\frac{0}{x}$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ 'x' ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $x \neq 0$)

ಉದಾ:-3: 3ಮತ್ತು 4 ರ ಮಧ್ಯೆ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸರಾಸರಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

1ನೇ ಪದ್ಧತಿ : a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮಧ್ಯೆ $\frac{a+b}{2}$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a = 3$ ಮತ್ತು $b = 4$, ($\frac{a+b}{2}$,'a', 'b' ಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎಂದು ಇದು 'a','b' ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವುದೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{(3+4)}{2} = \frac{7}{2}$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಮತ್ತು 4 ರ ಮಧ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. $3 < \frac{7}{2} < 4$

ಇದೇ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ ನಾವು 3 ಮತ್ತು $\frac{7}{2}$ ರ ಮಧ್ಯೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇಡಬಹುದು.

$$\frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{6+7}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{2\times 2} = \frac{13}{4}$$

$$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$$

2ನೇ ಪದ್ಧತಿ : ಮತ್ತೊಂದು ಸುಲಭವಾದ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ನಾವು ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಿಡಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ 3, 4 ಗಳನ್ನು 2 + 1 = 3 ಛೇದಗಳುಳ್ಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}$ ಮತ್ತು $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ 3 ಮತ್ತು 4 ರ ಮಧ್ಯೆ $\frac{10}{3}, \frac{11}{3}$ ಗಳು ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

$$3 = \frac{9}{3} < \left(\frac{10}{3} < \frac{11}{3}\right) < \frac{12}{3} = 4$$

ಈಗ ನಾವು 3, 4 ರ ಮಧ್ಯೆ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಿಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ 3, 4ಗಳನ್ನು 5 + 1 = 6 ಛೇದಗಳುಳ್ಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

i.e. $3 = \frac{18}{6}$ ಮತ್ತು $4 = \frac{24}{6}$ $\qquad 3 = \frac{18}{6} < \left(\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}\right) < \frac{24}{6} = 4$

ಈ ರೀತಿ 3, 4 ರ ಮಧ್ಯೆ ಅನಂತವಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬೇರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಸಹ ಇದೇ ರೀತಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದಾ? ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

i. 2, 3 ರ ಮಧ್ಯೆ ಸರಾಸರಿ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಯಾವುದೇ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii. $-\frac{3}{11}$ ಮತ್ತು $\frac{8}{11}$ ರ ಮಧ್ಯೆ ಯಾವುದೇ ಹತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉದಾ-4: $\frac{7}{16}, \frac{10}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{3}$ ಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ 16\overline{)7.00000} \\ 0 \\ \hline 70 \\ 64 \\ \hline 60 \\ 48 \\ \hline 120 \\ 112 \\ \hline 80 \\ 80 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.428571 \\ 7\overline{)10} \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)2.0000} \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\therefore \frac{7}{16} = 0.4375$
ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ

$\therefore \frac{10}{7} = 1.\overline{428571}$
ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ

$\therefore \frac{2}{3} = 0.666 = 0.\overline{6}$
ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ

ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣಗಳಿದ ನಾವು ಗಮನಿಸುವದೆನೆಂದರೆ ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು .

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(i) $\frac{1}{17}$ (ii) $\frac{1}{19}$ ಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿ

ಉದಾ -5: 3.28 ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ $q \neq 0$ ಮತ್ತು p, qಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು)

ಪರಿಹಾರ : $3.28 = \frac{328}{100}$

$= \frac{328 \div 2}{100 \div 2} = \frac{164}{50}$

$= \frac{164 \div 2}{50 \div 2} = \frac{82}{25}$ (ಅಂಶ ಛೇದಗಳು ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

$\therefore 3.28 = \frac{82}{25}$

ಉದಾ-6: $1.\overline{62}$ ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$.

ಪರಿಹಾರ : $x = 1.626262.....$ (1) ಆಗಿರಲಿ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$100x = 162.6262...$ (2)

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಿಂದ (1) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$\begin{array}{rl} 100x = & 162.6262... \\ x = & 1.6262... \\ - & - \\ \hline 99x = & 161 \\ \hline x = & \frac{161}{99} \end{array}$$

$$\therefore 1.\overline{62} = \frac{161}{99}$$

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

I. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :

i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{1}{2^2}$ iii. $\frac{1}{5}$ iv. $\frac{1}{5 \times 2}$

v. $\frac{3}{10}$ vi. $\frac{27}{25}$ vii. $\frac{1}{3}$ viii. $\frac{7}{6}$

ix. $\frac{5}{12}$ x. $\frac{1}{7}$

ಕೆಳಗಿನ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ :

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{32}{5} = 6.4$ $\frac{1}{3} = 0.333...$ $\frac{4}{15} = 0.2\overline{6}$

ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ, ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದ ಪಾಲಿಸಬೇಕಾದ ಗುಣಗಳೇನು ನೀವು ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ

ಛೇದವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದು ಮತ್ತು ನಿಯಮವನ್ನು ತರ್ಕಿಸಿ.

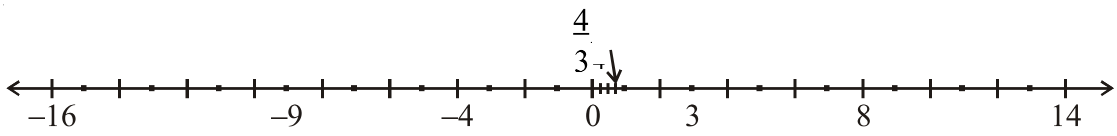
ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ ?

ಅಭ್ಯಾಸ – 1.1

1. (a) ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   (b) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಸ್ವಂತ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿ.
2. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿರಿ.
   i. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದು, ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಲ್ಲದ್ದು.
   ii. ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲದ್ದು.
   iii. ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲದ್ದು.
   iv. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ, ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಲ್ಲವೂ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ.
   v. ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲದ್ದು.
3. 1 ಮತ್ತು 2 ರ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $\frac{3}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{3}$ ರ ಮಧ್ಯೆ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಿಡಿ.
5. $\frac{8}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{-8}{5}$ ಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿ.
6. ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   I. i) $\frac{242}{1000}$ ii) $\frac{354}{500}$ iii) $\frac{2}{5}$ iv) $\frac{115}{4}$
   II. i) $\frac{2}{3}$ ii) $-\frac{25}{36}$ iii) $\frac{22}{7}$ iv) $\frac{11}{9}$
7. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ (p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   i) 0.36 ii) 15.4 iii) 10.25 iv) 3.25
8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ (p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   i) $0.\overline{5}$ ii) $3.\overline{8}$ iii) $0.\overline{36}$ iv) $3.12\overline{7}$
9. ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದಯೇ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶಗಳೋ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.
   (i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{11}{18}$ (iii) $\frac{13}{20}$ (iv) $\frac{41}{42}$

1.2 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Irrational Numbers)

ಮತ್ತೊಂದು ಸಾರಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ನಾವು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆಯಾ? ಇಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇನ್ನೂ ಬಹಳ ಇದ್ದಾವೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವೋ ನೋಡೋಣ.



ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

(i) $x^2 = 4$ (ii) $3x = 4$ (iii) $x^2 = 2$

ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ x ನ ಬೆಲೆಗಳು 2 ಮತ್ತು –2. 2ಮತ್ತು –2 ಗಳನ್ನು ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಸಮೀಕರಣ (ii) $3x = 4$ ನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ ನ್ನು ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಸಮೀಕರಣ (iii) $x^2 = 2$ ಕ್ಕೆ ಎರಡು ಕಡೆ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ $\sqrt{x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಬಲ್ಲೆವೇ? $\sqrt{2}$ ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$\sqrt{2}$ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ? ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

$\sqrt{2}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

	1.4142135
1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17611775

ಹಂತ 1 : 2 ರ ನಂತರ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವನ್ನಿಡಿ.

ಹಂತ 2 : ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ '0' (ಸೊನ್ನೆ) ಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 3 : '0' ಜೊಡಿಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ ಮೇಲೆ ಬಾರ್‌ನ್ನು ಹಾಕಿರಿ.

ಹಂತ 4 : ನಂತರ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ವರ್ಗಮೂಲ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ.

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142135 \ldots$

ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ $\sqrt{2}$ ರ ಬೆಲೆ ಅಂತ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಆವರ್ತವೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. $\sqrt{2}$ =1.4142135623731..... ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೆಲ್ಲೆವು. ಇದನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳದ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿದೆ.

$\sqrt{2}$ =1.4142135623731..... ಇದನ್ನು ಗೆರೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲೆವಾ? ಇದನ್ನು ಗೆರೆ(ಬಾರ್)ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಲಾರೆವು. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕರಣೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಕರಣಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕರಣಿಗಳು $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾರೆವು. ಇಲ್ಲಿ p, qಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು
$\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ (p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$).

ಇದೇ ರೀತಿ $\sqrt{3}$ = 1.7320508075689.....

$\sqrt{5}$ = 2.2360679774998.....

ಅಂತಿಮವಾಗಿ ಆವರ್ತಕವಲ್ಲದ ಅಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆನ್ನುವರು. ಕರಣೀಗಳು ಸಂಖ್ಯಾಗಣವನ್ನು ‘S’ ಅಥವಾ ‘Q′’ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) 2.1356217528..., (2) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, ಮುಂತಾದವು.

ಕ್ರಿ.ಪೂ. 5ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕು ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಮತ್ತು ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ ಆದ ಪೈಥಾಗೋರಸನ ಅನುಯಾಯಿಗಳು ಪೈಥಾಗೋರಿಯನ್‌ರು ಮೊದಲ ಬಾರಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ. ಇವನ್ನು ಕರಣೀಗಳೆಂದು ಹೆಸರಿಸಿದರು. $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಕರಣೀ ಎಂದು ಪೈಥಾಗೋರಿಯನ್‌ರು ನಿರೂಪಿಸಿದರು.

ನಂತರ ಸಿರೀನ್‌ಗೆ ಸೇರಿದ ಥಿಯೋಡೊರಸ್ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ ಮತ್ತು $\sqrt{17}$ ಗಳು ಸಹ ಕರಣೀಗಳೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದ. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 800 ಪ್ರಾಂತದ ಶುಲ್ಬ ಸೂತ್ರಗಳು ಗಳಲ್ಲಿವೆ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ಸಹ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕುರಿತ ಸೂಚನೆ ಇರುವುದು ಕಂಡುಬಂದಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$\sqrt{1}$	=	1
$\sqrt{2}$	=	1.414213.....
$\sqrt{3}$	=	1.7320508.....
$\sqrt{4}$	=	2
$\sqrt{5}$	=	2.2360679.....
$\sqrt{6}$	=	
$\sqrt{7}$	=	
$\sqrt{8}$	=	
$\sqrt{9}$	=	3

n ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $\sqrt{n}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ನೀವು ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದೇ ?

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ - ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ -ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :

$\sqrt{2}$ ನ್ನು $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ಆಗಿ ಅಂದರೆ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕೃತಿ ಹೇಳಿದಳು. ನೀನು ಕೃತಿಯ ತರ್ಕಕ್ಕೆ ಸಹವರ್ತಿಸುವೆಯಾ ?

π ಕುರಿತು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ

ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸಗಳ ನಡುವಿನ ಅನುಪಾತವನ್ನು π ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. $\pi = \frac{c}{d}$, π ಎಂಬುದು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಎಂಬ ಸಂದಿಗ್ಧ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿ (C) ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ (d) ಗಳು ಹೋಲಿಸಬಲ್ಲ ಉದ್ದಗಳಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಆ ಎರಡನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಅಳೆಯುವ ಮಾಪನ (ಪ್ರಮಾಣ ಅಳತೆ) ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ π ನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವರು.

π ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗಣಿಸಿದ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಆರ್ಕಿಮೆಡಿಸ್. ಇದರ ಬೆಲೆ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ 3.140845 ಮತ್ತು 3.142857 ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆಂದು ($3.140845 < \pi < 3.142857$) ನಿರೂಪಿಸಿದನು. π ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ನಿಗದಿಪಡಿಸಿದ ಕೀರ್ತಿ ಭಾರತದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಆರ್ಯಭಟ್ಟ (476-550 AD) ಇದೀಗ ಅತ್ಯಂತ ವೇಗ ಮತ್ತು ನಿಖರವಾಗಿ ಕೆಲಸಮಾಡಬಲ್ಲ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ π ಬೆಲೆಯನ್ನು 1.24 ಟ್ರಿಲಿಯನ್ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿದ್ದಾರೆ.

π =3.14159265358979323846264338327950 ….. π ನ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪ ಅಂತ್ಯ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ $\frac{22}{7}$ ನ್ನು π ನ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ $\pi \neq \frac{22}{7}$.

ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಮಾರ್ಚ್ ತಿಂಗಳ 14 ನೇ ದಿನಾಂಕವನ್ನು π ದಿನವಾಗಿ ಆಚರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಏಕೆಂದರೆ 3.14 ಮತ್ತು 1 : 59 (π = 3.14159 ….). ಆಹಾ! ಎಂತಹ ತಾರ್ಕಣೆ, ಅಲ್ಬರ್ಟ್ ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್ ಹುಟ್ಟುದಿನವನ್ನು ಸಹ ಮಾರ್ಚ್ 14ನೇ ದಿನಾಂಕ, 1879 ಅಲ್ಲವೇ !

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :

$\sqrt{3}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

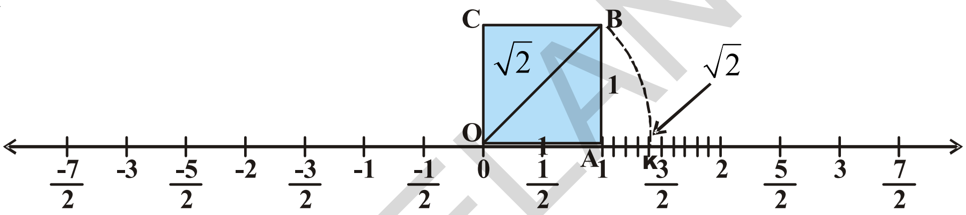
1.3 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸುವುದು :

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ಗೊತ್ತು. ಅಂದರೆ ಇದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನೋಡುವುದಾದರೆ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೇ ಎನಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಸತ್ಯವೇ ? $\sqrt{2}$ ನ್ನು ನೀನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಲಾರೆಯೇ? ಈಗ ನಾವು $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಗಳಂತಹ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸುವುದೋ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಉದಾ-7: $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಒಂದು ಮಾನ (ಯೂನಿಟ್) ಬಾಹುವಿರುವ ಚೌಕ OABC ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ O ಹತ್ತಿರ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪೈಥಾಗೋರಾಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$



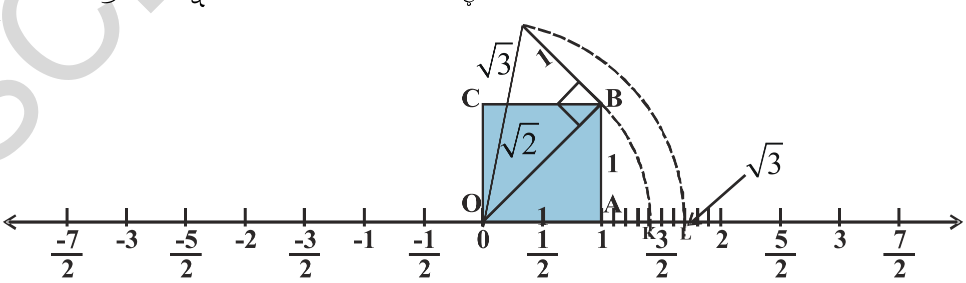
ಚಿತ್ರ. (i)

OB = $\sqrt{2}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಒಂದು ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ OB ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ O ಗೆ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ K ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

K ಎಂಬುದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಉದಾ-8: $\sqrt{3}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಚಿತ್ರ (i) ನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.



ಚಿತ್ರ (ii)

ಚಿತ್ರ (ii)ರಲ್ಲಿ 1 ಮೂಲಮಾನವಾಗಿರುವ BDನ್ನು OBಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. O, Dಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

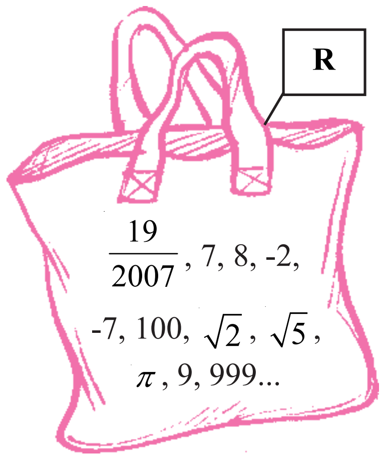
ಪೈಥಾಗೋರಾಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

ಒಂದು ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ OD ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ 0 ಗೆ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ 'L' ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. 'L' ಎಂಬುದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ $\sqrt{3}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.ಈ ರೀತಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ಗೆ $\sqrt{n-1}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ನಂತರ $\sqrt{n}$ ನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

$\sqrt{5}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{5}$ ಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $h^2 = (2)^2 + (1)^2$]

1.3 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು :



ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $q \neq 0$ ಮತ್ತು p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಇದೇ ರೀತಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾರದಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಇನ್ನೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸದೇ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವಾದರೂ ಇವೆಯಾ? ಯಾವು ಇಲ್ಲ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಸೂಚಿಸುವವು. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಖ್ಯಾಗಣಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯಾಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವನ್ನು R ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದು ಏಕೈಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು ಒಂದೇ ಒಂದು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು '**ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ** ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು

$-5.6, \sqrt{21}, -2, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9},$ 12.5, 12.5123..... ಮುಂತಾದವು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಇವೆ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ.

ಉದಾ-9: $\frac{1}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{7}$ ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ,

ಪರಿಹಾರ : $\frac{1}{5} = 0.20$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

$\frac{1}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{7}$ ಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಈ ಎರಡರ ನಡುವೆ ಅನಂತ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ

0.201201120111..., 0.24114111411114…, 0.25231617181912..., 0.267812147512 …

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{7}$ ಗಳ ನಡುವೆ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲೆವೇ?

ಉದಾ-10: 3 ಮತ್ತು 4 ರ ನಡುವೆ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

ab ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಆಗದಂತೆ a, b ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ $\sqrt{ab}$ ಎನ್ನುವುದು a, b ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ 3 ಮತ್ತು 4 ರ ಮಧ್ಯೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $= \sqrt{3\times 4} \quad = \sqrt{3}\times\sqrt{4}$

$= \sqrt{3}\times 2 = 2\sqrt{3}$

ಉದಾ-11: ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ (iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$

ಪರಿಹಾರ :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right) = 3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}$

$= 6$, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು..

$$\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right) = 3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 9 - 3 = 6$$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

(iii) $\dfrac{10}{2\sqrt{5}} = \dfrac{10 \div 2}{2\sqrt{5} \div 2} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

(iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2.\sqrt{2}\ .2 + 2^2 = 2 + 4\sqrt{2} + 4$

$= 6 + 4\sqrt{2}$, ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 1.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ.

   (i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{441}$ (iii) 30.232342345…

   (iv) 7.484848… (v) 11.2132435465 (vi) 0.3030030003.....

2. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂನಡುವೆ ಇರುವ ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಬರೆ.

3. $\dfrac{5}{7}$ ಮತ್ತು $\dfrac{7}{9}$ ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ?

4. 0.7 ಮತ್ತು 0.77 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ?

5. $\sqrt{5}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು 3 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ?

6. ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ $\sqrt{7}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\sqrt{10}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

8. 2, 3 ರ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ / ಅಸತ್ಯವೋ ಎಂದು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿವರಿಸಿರಿ.

   (i) ಪ್ರತಿ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು.

   (ii) ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು.

   (iii) ಪ್ರತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

   (iv) 'n' ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದರೆ $\sqrt{n}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

   (v) 'n' ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದರೆ $\sqrt{n}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

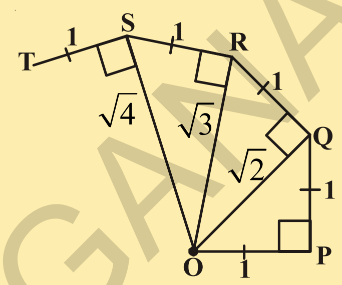
   (vi) ಪ್ರತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

"ವರ್ಗಮೂಲ ಸರಪಳಿ " ಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ವರ್ಗಮೂಲ ಸರಪಳಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ದೊಡ್ಡ ಅಳತೆಯ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ.

ಹಂತ 1 : 'O' ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{OP}$ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಹಂತ 2 : $\overline{OP}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ $\overline{PQ}$ 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಾಗಿ PO ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ OP = PQ = 1ಸೆಂ.ಮೀ.) (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿ)

ಹಂತ 3 : O, Q ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ (OQ = $\sqrt{2}$)

ಹಂತ 4 : $\overline{QR}$ =1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದಿಂದ $\overline{OQ}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 5 : O, R ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ (OR = $\sqrt{3}$)

ಹಂತ 6 : RS = 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದಿಂದ $\overline{OR}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ RS ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

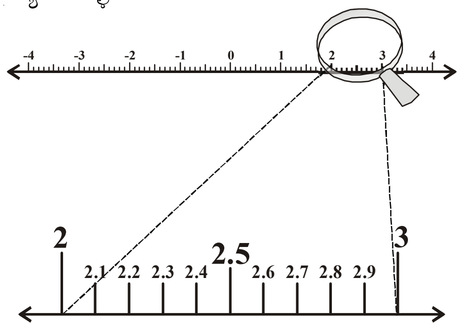
ಹಂತ 7 : ಇದೇ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಹಂತಗಳವರೆಗೆ ಮುಂದುವರೆಸಿ. ಆಗ $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$ ... ಇತ್ಯಾದಿ. ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಒಂದು ಅಂದವಾದ ಸರಪಳಿ ಆಕಾರ ಉಂಟಾಗುವುದನ್ನು ನೋಡಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, $\overline{OT}$, $\overline{OU}$ ... ಇತ್ಯಾದಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ ಸೂಚಿಸುವವು.

1.4 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಹೆಚ್ಚಳದ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸುವುದು:

ಪ್ರತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಹೆಚ್ಚಳ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ತೋರಿಸಬಹುದೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

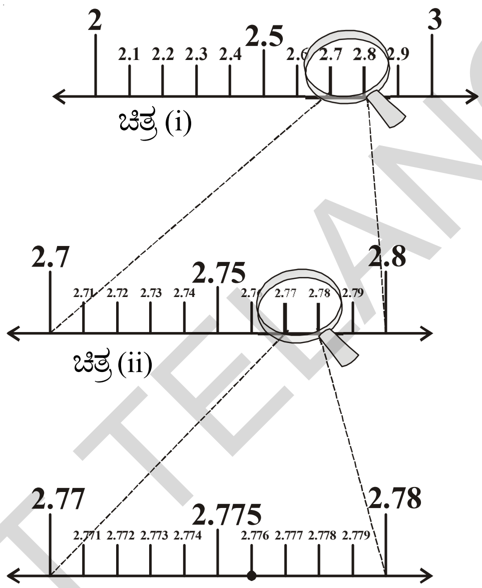
ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2.776 ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸೋಣ. ಈ ದಶಮಾಂಶವು 2, 3 ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವುದೆಂದು ಮತ್ತು ಇದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶವೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.



ಚಿತ್ರ (i)

ನಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಭೂತಕನ್ನಡಿ ಇದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಭೂತಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 2 ಮತ್ತು 3 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ 2 ಮತ್ತು 3 ರ ನಡುವೆ ಹತ್ತು ಸಮ ಭಾಗಗಳು ಇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2.1, 2.2, 2.3........., 2.9 ಚಿತ್ರ (i)ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಇವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.

2.776 ಎಂಬುದು 2.7 ಮತ್ತು 2.8 ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿನ ಭೂತಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 2.7 ಮತ್ತು 2.8 ರ ನಡುವೆ (ಚಿತ್ರ (ii)ರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಈ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಹತ್ತು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದಂತೆ ಊಹಿಸಿ. ಅವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2.71, 2.72, 2.73, ... ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಇವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ (i)

ಚಿತ್ರ (ii)

ಚಿತ್ರ (iii)

ಈಗ 2.776 ಎಂಬುದು 2.77 ಮತ್ತು 2.78 ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿನ ಭೂತಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 2.77 ಮತ್ತು 2.78 (iii) ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪ್ರದೇಶದ ಮೇಲೆ ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಮತ್ತೇ ಹತ್ತು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದಂತೆ ಊಹಿಸಿ. ಚಿತ್ರ (iii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡವು ಮಾಡಿ ನೋಡಿ.

2.771 ನ್ನು, ಎರಡನೇ ಬಿಂದು 2.772....... ನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸುವವು. 6ನೇ ಬಿಂದು 2.776 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಭೂತಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತಾ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಹೆಚ್ಚಳ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಈಗ ನಾವು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಹೆಚ್ಚಳ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಗುರುತಿಸೋಣ.

ಉದಾ-12: 3.5$\overline{8}$ ನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಹೆಚ್ಚಳ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರಿ.

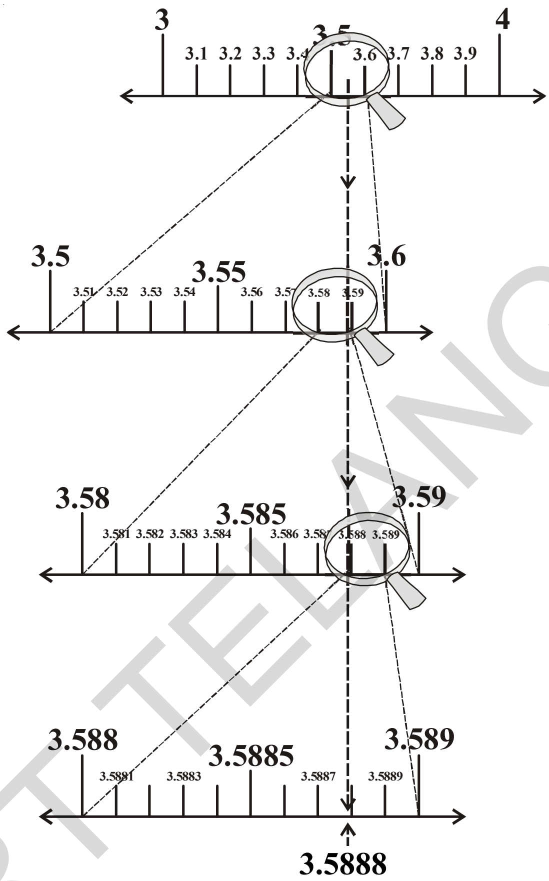
ಪರಿಹಾರ : ಕ್ರಮಾನುಗತ ಹೆಚ್ಚಳ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೂಲಕ 3.5888 ನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು.

ಹಂತ 1 :

ಹಂತ 2 :

ಹಂತ 3 :

ಹಂತ 4 :



ಅಭ್ಯಾಸ – 1.2

1. 2.874 ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಹೆಚ್ಚಳ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸಿ.
2. 5.$\overline{28}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಹೆಚ್ಚಳ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 2 ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ತೋರಿಸಿರಿ.

1.5 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳು

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯಗುಣ. ಸಹವರ್ತಿನೀಯ ಗುಣ ಮತ್ತು ವಿತರಣಾ ಗುಣಗಳು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆವೃತ್ತ ಗುಣವನ್ನು ಸಹ ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಕರಣಿಗಳು ಸಹ ಆವೃತ್ತ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಂದು ನೀನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ?

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$\left(\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$. ಇಲ್ಲಿ '0' ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

$\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)=0$. ಇಲ್ಲಿ '0' ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

$\left(\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{2}\right)=2$. ಇಲ್ಲಿ '2' ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=1$. ಇಲ್ಲಿ '1' ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ? ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$3\sqrt{2}$ ನ್ನು $2\sqrt{2}$ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತವು $5\sqrt{2}$ ಎಂದು ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡಿದರೆ $\sqrt{2}$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಆಲೋಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಚರ್ಚಿಸಿ:

1. "$5\sqrt{3}+2\sqrt{7}=7\sqrt{10}$" ಎಂದು ಹಸಿತಾ ಹೇಳಿದಳು ನೀವು ಇದನ್ನು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ ?
2. $5\sqrt{2}-\sqrt{8}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ ?

ಕರಣಿಗಳ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾ-13: (i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (iii) $21+\sqrt{3}$ (iv) $\pi+3$ ಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆಯೇನೋ ನೋಡಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $\sqrt{2}=1.414\ldots$, $\sqrt{3}=1.732\ldots$, $\pi=3.1415\ldots$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

(i) $5\sqrt{2} = 5(1.414\ldots) = 7.070\ldots$

(ii) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{7.070}{2} = 3.535\ldots$ (i ರಿಂದ)

(iii) $21+\sqrt{3} = 21+1.732\ldots = 22.732\ldots$

(iv) $\pi+3 = 3.1415\ldots + 3 = 6.1415\ldots$

ಇವೆಲ್ಲವೂ ಅಂತ್ಯ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕವಲ್ಲದ ದಶಮಾಂಶಗಳು.
ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಳು.

q ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ, s ಕರಣಿ ಆದರೆ $q+s$, $q-s$, qs ಮತ್ತು $\frac{q}{s}$ $(s\neq 0)$ ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕರಣಿಗಳೇ.

ಉದಾ-14: $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ ನ್ನು $3\sqrt{5}-7\sqrt{3}$ ರಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

$$(3\sqrt{5}-7\sqrt{3}) - (5\sqrt{3}+7\sqrt{5})$$
$$= 3\sqrt{5}-7\sqrt{3} - 5\sqrt{3}-7\sqrt{5}$$
$$= -4\sqrt{5}-12\sqrt{3}$$
$$= -(4\sqrt{5}+12\sqrt{3})$$

ಉದಾ-15: $6\sqrt{3}$ ನ್ನು $13\sqrt{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $6\sqrt{3}\times 13\sqrt{3} = 6\times 13\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 78\times 3 = 234$

ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. a,b ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; if $b \neq 0$ (iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿವಿದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಈಗ ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾ-16: ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$ (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

ಪರಿಹಾರ :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) = 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5+2\sqrt{10}+2 = 7+2\sqrt{10}$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5-2 = 3$

ಉದಾ-17: $5+2\sqrt{6}$ ನ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$= \sqrt{3+2+2.\sqrt{3}.\sqrt{2}}$ $\qquad \because \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$= \sqrt{3}+\sqrt{2}$

1.5.1 ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಣ ಮಾಡುವುದು :

ನಾವು $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಬಲ್ಲೆವೇ?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟೋ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ ?

$\sqrt{2}$ = 1.4142135..... ಇದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕವಾಗದ ದಶಮಾಂಶ ಹಾಗದರೆ ಇದನ್ನು 1 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲೆವೇ?

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಛೇದವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಣಗೊಳಿಸಲು ಇದರ ಅಂಶ ಛೇದಗಳನ್ನು $\sqrt{2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸೋಣ.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$ ಅಂದರೆ $\sqrt{2}$ ರಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಎಂದರ್ಥ.

ಈಗ ನಾವು $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಬಲ್ಲೆವೇ? ಇದು 0 ಮತ್ತು $\sqrt{2}$ ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ಇಲ್ಲಿ 2 ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ನ್ನು $\sqrt{2}$ ರ ಅಕರಣೀಕಾರ (ಸಂಯುಗ್ಮಕರಣಿ)ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ, $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ರ ಅಕರಣೀಕಾರಕ $\sqrt{8}$. ಇನ್ನೂ $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$, ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ಎಂಬುದು $\sqrt{2}$ ರ ಒಂದು ಅಕರಣೀಕಾರಕ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{2}$ ರ ಅಕರಣೀಕಾರಕಗಳು $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$ ... ಮುಂತಾದವು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{2}$ ನ್ನು $\sqrt{2}$ ರ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಅಕರಣೀಕಾರಕ ಎನ್ನುವರು. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖೆಯಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಅಕರಣೀಕಾರಕಗಳೆನ್ನುವರು. ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಕರಣೀಕಾರಕಗಳು ಏಕೈಕವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಅಕರಣೀಕಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಛೇದಗಳಿಗೆ ಅಕರಣೀಕಾರಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

ಉದಾ-18: $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ ರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ : $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ ರ ಅಂಶ ಛೇದಗಳನ್ನು $4-\sqrt{5}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ.

$$\frac{1}{4+\sqrt{5}}\times\frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\frac{4-\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4-\sqrt{5}}{16-5}=\frac{4-\sqrt{5}}{11}$$

ಉದಾ-19: $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$ ರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ : $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-16\times 3}$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7-4\sqrt{3}$$

ಉದಾ-20: $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ ನ್ನು ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ,ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ.

ಸಾಧನೆ : $7+4\sqrt{3}$ ರ ಅಕರಣೀಕಾರಕ $7-4\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2+\sqrt{5}$ ರ ಅಕರಣೀಕಾರಕ $2-\sqrt{5}$.

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\times\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2}+\frac{2-\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}+\frac{2-\sqrt{5}}{(4-5)}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}+\frac{2-\sqrt{5}}{(-1)}$$

$$=7-4\sqrt{3}-2+\sqrt{5}=5-4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

1.5.2 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳು :

ನಾವು ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಾರಿ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ iii) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{if } m > n \\ 1 & \text{if } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{if } m < n \end{cases}$

iv) $a^m b^m = (ab)^m$ v) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ vi) $a^0 = 1$

ಇಲ್ಲಿ 'a', 'm' ಮತ್ತು 'n' ಗಳು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$. 'a' ನ್ನು ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು m, n ಗಳನ್ನು ಘಾತ ಸೂಚಿಗಳು ಎಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

i) $7^3 . 7^{-3} = 7^{3+(-3)} = 7^0 = 1$ ii) $(2^3)^{-7} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$

iii) $\frac{23^{-7}}{23^4} = 23^{-7-4} = 23^{-11}$ iv) $(7)^{-13} . (3)^{-13} = (7 \times 3)^{-13} = (21)^{-13}$

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗಣಿಸೋಣ.

i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}}$

ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಘಾತ ಸೂಚಿಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾರೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಘಾತಸೂಚಿಗಳಿಗೆ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಎಷ್ಟಾದರೂ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಮೊದಲು ನಾವು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯ 'n' ನೇ ಮೂಲ ಅಂದರೆ ಏನೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

$3^2 = 9$ ಆದರೆ $\sqrt{9} = 3$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.   (9 ರ ವರ್ಗಮೂಲ 3)

ಅಂದರೆ $\sqrt[2]{9} = 3$

ಇದೇ ರೀತಿ $5^2 = 25$ ಆದರೆ $\sqrt{25} = 5$ ಅಂದರೆ $\sqrt[2]{25} = 5$ ಇದೇ ರೀತಿ

$\sqrt[2]{25} = (25)^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2 \times \frac{1}{2}} = 5$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$2^3 = 8$ ಆದರೆ $\sqrt[3]{8} = 2$ (8 ರ ಘನಮೂಲ 2); $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

$2^4 = 16$ ಆದರೆ $\sqrt[4]{16} = 2$ (16 ರ 4ನೇ ಮೂಲ 2); $\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$

$2^5 = 32$ ಆದರೆ $\sqrt[5]{32} = 2$ (32 ರ 5ನೇ ಮೂಲ 2); $\sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$

$2^6 = 64$ ಆದರೆ $\sqrt[6]{64} = 2$ (64 ರ 6ನೇ ಮೂಲ 2); $\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$

....

ಇದೇ ರೀತಿ $\mathbf{a^n = b}$ ಆದರೆ $\sqrt[n]{\mathbf{b}} = \mathbf{a}$ (b ಯ nನೇ ಮೂಲ a) ; $\sqrt[n]{b} = (b)^{\frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$

a > 0 ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು '**n**' ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ '**b**' ಗೆ $\mathbf{b^n = a}$ ಆದರೆ **b** ನ್ನು '**a**' ಯ '**n**'ನೇ ಮೂಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಧಾರಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಾತ ಸೂಚಿಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ.

$a > 0$ ಒಂದು ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು p, q ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ iv) $a^p . b^p = (ab)^p$ v) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಾಧನೆಗೆ ಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ-21: ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ.

i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}}$

ಪರಿಹಾರ : i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{7}}$

iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{3-5}{15}} = 3^{\frac{-2}{15}} = \frac{1}{3^{2/15}}$

iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}} = (7 \times 11)^{\frac{1}{17}} = 77^{\frac{1}{17}}$

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ :

i. $(16)^{\frac{1}{2}}$ ii. $(128)^{\frac{1}{7}}$

iii. $(343)^{\frac{1}{5}}$

ಕರಣಿ :

'**n**' ಎಂಬುದು 1 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು '**a**' ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಇದು ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ **n**ಘಾತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ $\sqrt[n]{a}$ ಅಥವಾ $a^{1/n}$ ನ್ನು **n** ನೇ ಮೂಲದ (ಕ್ರಮದ) ಕರಣಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ **a** ಯ ಧನ **n**ನೇ ಮೂಲವನ್ನು ಕರಣಿ ಅಥವಾ ರ್‍ಯಾಡಿಕಲ್ ಎನ್ನುವರು. ಇಲ್ಲಿ '**a**'ನ್ನು ರ್‍ಯಾಡಿಕೆಂಡ್ (ಕರಣೀಯ) ಎಂದು $\sqrt[n]{\ }$ ನ್ನು ಮೂಲಚಿಹ್ನೆಯಾಗಿ(ಕರಣಿ ಚಿಹ್ನೆ) ಮತ್ತು **n**ನ್ನು ಕರಣಿಯ ಕ್ರಮ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಕರಣಿಯ ರೂಪ

ಘಾತರೂಪ $a^{\frac{1}{n}}$

ಕರಣೀಯರೂಪ $\sqrt[n]{a}$

ಕರಣೀಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, ...$ ಮುಂತಾದವು.

ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ $\sqrt{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಇದನ್ನು $7^{\frac{1}{2}}$ ಆಗಿ $\sqrt[2]{7}$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. 7 ಎಂಬುದು ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{7}$ ಎಂಬುದು ಎರಡನೇ ಕ್ರಮದ ಕರಣಿ.

ಒಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ $\sqrt[3]{8}$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. 8 ನ್ನು 2 ರ ಘನವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt[3]{8}$ ಎಂಬುದು ಕರಣಿಯಲ್ಲ.

$\sqrt{\sqrt{2}}$ ಎಂಬುದು ಕರಣಿಯೇ? ಅಲ್ಲವೇ? $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ 2ನ್ನು ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕನೇ ಘಾತಸೂಚಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಲಾರೆವು. ಇದು 4ನೇ ಕ್ರಮದ (ಪರಿಮಾಣದ) ಕರಣಿ.

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಕೆಳಗಿನ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   i. $\sqrt{2}$ ii. $\sqrt[3]{9}$ iii. $\sqrt[5]{20}$ iv $\sqrt[17]{19}$

2. ಘಾತಾಂಕಗಳನ್ನು ಕರಣಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   i. $5^{\frac{1}{7}}$ ii. $17^{\frac{1}{6}}$ iii. $5^{\frac{2}{5}}$ iv $142^{\frac{1}{2}}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 1.4

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ.

   i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

   iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ.

   i) $5-\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iii) $\left(\sqrt{2}-2\right)^2$

iv) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ v) 2π vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vii) $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ x, y, z ಮುಂತಾದ ಅವ್ಯಕ್ತಾಕ್ಷರಗಳು(ಚರಾಕ್ಷರ) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆಯಾ? ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆಯಾ? ತಿಳಿಸಿ.

i) $x^2 = 7$ ii) $y^2 = 16$ iii) $z^2 = 0.02$

iv) $u^2 = \frac{17}{4}$ v) $w^2 = 27$ vi) $t^4 = 256$

4. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಅದರ ವ್ಯಾಸಕ್ಕಿರುವ ಅನುಪಾತ $\frac{c}{d}$ ನ್ನು π ಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. π ನ್ನು ಕರಣೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸುವರು ?

5. ಛೇದಗಳನ್ನು ಆಕರಣೀಕರಿಸಿ.

i) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. ಛೇದಗಳನ್ನು ಆಕರಣೀಕರಿಸಿ, ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ.

i) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ iii) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ iv) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. $\sqrt{2} = 1.414$ ಮತ್ತು $\sqrt{5} = 2.236$ ಆದರೆ $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೂರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $64^{\frac{1}{6}}$ ii) $32^{\frac{1}{5}}$ iii) $625^{\frac{1}{4}}$

iv) $16^{\frac{3}{2}}$ v) $243^{\frac{2}{5}}$ vi) $(46656)^{\frac{-1}{6}}$

9. $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{343} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$ ನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ.

10. 'a' ಮತ್ತು 'b' ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ a, b ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a + b\sqrt{6}$ ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = a - b\sqrt{15}$

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

1. $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಇಲ್ಲಿ p,q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$.
2. $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಇಲ್ಲಿ p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$.
3. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪ ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ಅಥವಾ ಆವರ್ತಕವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.
4. ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪ ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಆವರ್ತಿತವಾಗದ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿ ಇರಲಾರವು.
5. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳುಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುವರು.
6. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಾದೃಶ್ಯವಾಗಿ ಏಕೈಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಪ್ರತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಾದೃಶ್ಯವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಏಕೈಕ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ.
7. q ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು s ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ q+s, q-s, qs ಮತ್ತು $\frac{q}{s}$ ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ.
8. n ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $\sqrt{n}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
9. a, b ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ

   i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0)$

   iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

   v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
10. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಯಗೊಳಿಸಲು ಅಂಶ ಛೇದಗಳನ್ನು $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ a, b ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.
11. $a > 0$ ಒಂದು ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು p, q ಗಳು ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

    i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$ iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

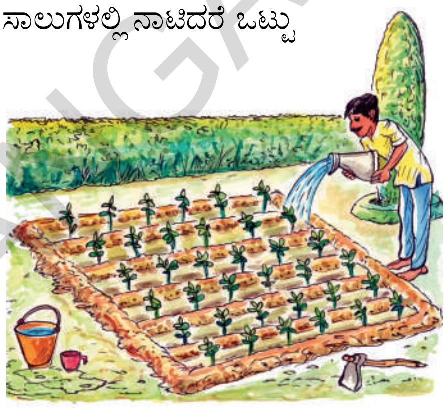
    iv) $a^p . b^p = (ab)^p$
12. 'n' ಎಂಬುದು 1 ಕ್ಕಿಂತ (>) ದೊಡ್ಡದಾದ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು 'a' ಎಂಬುದು ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ nನೇ ಮೂಲವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $\sqrt[n]{a}$ ಅಥವಾ $a^{\frac{1}{n}}$ n ಕ್ರಮದ ಕರಣಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

02

2.1 ಪರಿಚಯ :

ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿರುವ ಮಡಿಯಲ್ಲಿ ಆರು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಆರು ಸಸ್ಯಗಳಂತೆ ನೆಡಲಾಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು ಮಡಿಯಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಷ್ಟು? ಒಂದು ವೇಳೆ 'x' ಸಸ್ಯಗಳಂತೆ 'x' ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ನಾಟಿದರೆ ಒಟ್ಟು ಸಸ್ಯಗಳೆಷ್ಟಿರಬಹುದು? ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಇವು x^2 ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.



1 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಈರುಳ್ಳಿ ಬೆಲೆ ₹10 ಇಂದರ್ p ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಈರುಳ್ಳಿ ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ರಾಜು q ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಮತ್ತು ಹನೀಫ್ r ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.ರಂತೆ ಕೊಂಡರು. ಪ್ರತಿ ಒಬ್ಬರು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಹಣ ಕೊಡಬೇಕು? ಅವರು ಸಲ್ಲಿಸಿದ ಹಣ ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹10p, ₹10q ಮತ್ತು ₹10r ಆಗುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ನಾವು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ 's^2' ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ 'lb' ಆಯತ ಘನ ಘನಫಲ 'lbh' ನಂತಹ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ?

$3xy$, x^2+2x, $x^3 - x^2 + 4x + 3$, πr^2, $ax + b$ ಮೊದಲಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಾವು ಈವರೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳೆಲ್ಲವುದರಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ ಘಾತಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೀರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಯಾವುವೋ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

$$x^2, \quad x^{\frac{1}{2}} + 3, \quad 2x^2 - \frac{3}{x} + 5; \quad x^2 + xy + y^2$$

ಮೇಲಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ $x^{\frac{1}{2}} + 3$ ಮತ್ತು $2x^2 - 3x^{-1} + 5$ ಎಂಬುವವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೊದಲ ಬೀಜೋಕ್ತಿ $x^{\frac{1}{2}} + 3$ ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪದ $x^{\frac{1}{2}}$ ನ ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತಾಂಕ ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ (ಅಂದರೆ $\frac{1}{2}$) ಮತ್ತು ಎರಡನೆ ಬೀಜೋಕ್ತಿ $2x^2 - \frac{3}{x} + 5$ ಸಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಇದನ್ನು $2x^2 - 3x^{-1} + 5$. ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಎರಡನೆ ಪದ $(3x^{-1})$ ರಲ್ಲಿ ಘಾತಾಂಕ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. (ಅಂದರೆ -1). ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತಾಂಕಗಳು ಋಣೇತರ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಆದಾಗ ಆ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು? ಯಾವುವು ಅಲ್ಲ? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $4x^2 + 5x - 2$ (ii) $y^2 - 8$ (iii) 5 (iv) $2x^2 + \frac{3}{x} - 5$

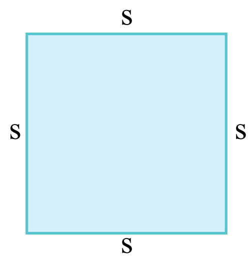
(v) $\sqrt{3}x^2 + 5y$ (vi) $\frac{1}{x+1}$ (vii) $\sqrt{x}$ (viii) $3\,xyz$

ಈಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಆಧಾರವಾಗಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

2.2 ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

ಪ್ರತಿ ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂದು ಗುರ್ತು (ಅಕ್ಷರ) ಬಳಸುತ್ತೇವೆಂದು, ಚರಾಕ್ಷರ ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ನಮ್ಮ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗಾಗಿ x, y, z ಇತ್ಯಾದಿ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $2x$, $3x$, $-x$, $\frac{3}{4}x$ .... ನಂತಹ ಚರಾಕ್ಷರ x ನಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬೀಜಪದೋಕ್ತಿಗಳೆಲ್ಲಾ (ಬಿಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) × (ಘಾತರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ)ರ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ನಾವು P = 4s ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಇಲ್ಲಿ '4' ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದರೆ 's' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರ ಚೌಕದ ಬಾಹುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ವಿವಿಧ ರಕಗಳ ಚೌಕಗಳಿಗೆ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾಗಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ :

ಚೌಕ	ಸುತ್ತಳತೆ
(s)	(4s)
4 ಸೆಂ.ಮೀ	P = 4 × 4 = 16 ಸೆಂ.ಮೀ
5 ಸೆಂ.ಮೀ	P = 4 × 5 = 20 ಸೆಂ.ಮೀ
10 ಸೆಂ.ಮೀ	P = 4 × 10 = 40 ಸೆಂ.ಮೀ

ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕದ ಬೆಲೆ . '4' ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಬೆಲೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಚರಾಕ್ಷರ ಬೆಲೆ(ಗಳು) ಯಾವಾಗಲೂ ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಇರುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು '(ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) × (ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ)' ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಾಗ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಸಹ ತಿಳಿಯದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು a, b, c ... ಮೊದಲಾದ ಅಕ್ಷರಗಳನನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ax, by, cz, ... ಮೊದಲಾದ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c

... ಗಳತಂಹ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ನಿರಂಕುಶ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು (Arbitarary Constant) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉಳಿದ ಬಿಜೋಕ್ತಿಗಳಂತಹ x^2, $x^2 + 2x + 1$, $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಮಗೆ ಪರಿಚಯ ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೇ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

- 'x' ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- 'y' ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಮೂರು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- $2x^2 + 3xy + 5y^2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಿಂದ ಇದೆಯಾ?
- ವಿವಿಧ ತರದ ಘಾನಕೃತಿಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರ, ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

2.3 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ :

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಘಾತಾಂಕವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಚರಾಕ್ಷರದ ಸಹಗುಣಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಅತಿ ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತಾಂಕ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಗರಿಷ್ಟಘಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು, ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) $3x^2 + 7x + 5$ (ii) $3x^2y^2 + 4xy + 7$

$3x^2 + 7x + 5$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $3x^2$, $7x$ ಮತ್ತು 5 ಗಳು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿನ ಪದಗಳು. ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದಕ್ಕೆ ಸಹಗುಣಕ ಇರುತ್ತದೆ. $3x^2 + 7x + 5$ ರಲ್ಲಿ x^2 ನ ಸಹಗುಣಕ 3, $7x$ ನಲ್ಲಿ x ನ ಸಹಗುಣಕ 7 ಮತ್ತು x^0 ನ ಸಹಗುಣಕ 5 ($x^0=1$ ಎಂದು ಗುರ್ತು ತಂದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿನ ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತ ಅಂದರೆ ಚರಾಕ್ಷರ x ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತಾಂಕ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಕೊಟ್ಟ ಬೀಜೋಕ್ತಿ $3x^2 + 7x + 5$ ರಲ್ಲಿ x ನ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತಾಂಕ ಹೊಂದಿದ ಪದ $3x^2$ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದರ ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತ '2' ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಎರಡನೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x^2y^3 + 4xy + 7$ ನ ಸಹ ಗುಣಕಗಳು , ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ? ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡರಂತೆ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆ ಪದದಲ್ಲಿ x^2y^3 ನ ಸಹಗುಣಕ 3, ಎರಡನೆ ಪದದಲ್ಲಿ xy ನ ಸಹಗುಣಕ 4 ಮತ್ತು ಮೂರನೆ ಪದದಲ್ಲಿ x^0y^0 ನ ಸಹಗುಣಕ 7ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಪ್ರತಿ ಪದದಲ್ಲಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಆ ಪದದ ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $3x^2y^3$ ನ ಪರಿಮಾಣ $2 + 3 = 5$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿನ ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಆದ್ದರಿಂದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x^2y^3 + 4xy + 7$ ನ ಪರಿಮಾಣ 5 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪರಿಮಾಣ ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೋ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ. ಸ್ಥಿರಾಂಕದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ತರಹ ಚರಾಕ್ಷರ ಇರುವಂತೆ ಕಾಣಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ x ನಲ್ಲಿ x^0 ಮತ್ತು ಆ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸ್ಥಿರಾಂಕ 5 ರ ಪರಿಮಾಣ 'ಸೊನ್ನೆ' ಏಕೆಂದರೆ ಇದನ್ನು $5x^0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ನೀವು ಪರಿಮಾಣಗಳು 1, 2, ಇಲ್ಲವೇ 3 ಹೊಂದಿದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದಿರಿ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ n ನ ಪರಿಮಾಣ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲಿರಾ? ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ n ಪರಿಮಾಣ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

ಇದರಲ್ಲಿ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $a_n \neq 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಸೊನ್ನೆಗಳು), ಆದರೆ ನಮಗೆ **'ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ'** ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **'0'** ಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸೊನ್ನೆಯ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಇದನ್ನು ನಿರ್ವಚಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಚರಾಕ್ಷರದ ಯಾವ ಘಾತಾಂಕಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇವು ಮಾಡಿರಿ:

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) $7x^3 + 5x^2 + 2x - 6$ (ii) $7 - x + 3x^2$
   (iii) $5p - \sqrt{3}$ (iv) 2 (v) $-5xy^2$
2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ x^2 ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) $15 - 3x + 2x^2$ (ii) $1 - x^2$ (iii) $\pi x^2 - 3x + 5$ (iv) $\sqrt{2}x^2 + 5x - 1$

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ :

(i) ಪರಿಮಾಣಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಧಗಳು :

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಪರಿಮಾಣ	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಹೆಸರು	ಉದಾಹರಣೆ
ನಿರ್ವಚಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ	ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ	0
ಸೊನ್ನೆ	ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ	$-12; 5; \frac{3}{4}$ ಮೊದಲಾದವು
1	....	$x - 12; -7x + 8; ax + b$ ಇತ್ಯಾದಿ.
2	ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ	....
3	ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ	$3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$

ಸಾಧಾರವಣವಾಗಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ 'n' ಆದರೆ ಅದನ್ನು n ನೇಗರಿಷ್ಟ ಘಾತದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(ii) ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಧಾರದಿಂದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿಧಗಳು :

ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಹೆಸರು	ಉದಾಹರಣೆ	ಪದಗಳು
1	ಏಕಪದೋಕ್ತಿ	$-3x$	$-3x$
2	ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ	$3x + 5$	$3x$, 5
3	ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ	$2x^2 + 5x + 1$	....
3 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ	....	$3x^3$, $2x^2$, $-7x$, 5

ಗಮನಿಸಿ : ಒಂದು ಬಹುಳಪದೋಕ್ತಿ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಬಹುಳ ಪದಗಳು ಆಗಿರಬೇಕಿಲ್ಲ.

ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಿಂದ ಕೂಡಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೂ ಅಥವಾ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೂ ಆಗಬಹುದು.

ಉದಾ: $3x$ ಅಥವಾ $2x - 5$

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ.

ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಿಂದ ಹೊಂದಿರುವ 3ನೇ ಪರಿಮಾಣ ಘನಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ xನಿಂದ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು $p(x)$, $q(x)$ ಅಥವಾ $r(x)$ ನಂತವುಗಳಾಗಿ ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಕೆಲವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$q(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$

$r(y) = y^4 - 1$

$t(z) = z^2 + 5z + 3$

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಾದರೂ ಇರಬಹುದು.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ:

1. x ಚರಾಕ್ಷರದಿಂದ ಕೂಡಿದ ದ್ವಿಪದಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ?
2. p ಚರಾಕ್ಷರನ್ನೊಳಗೊಂಡ 15 ಪದಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೀರಿ?

ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಸಹ ಬಹಳ ಇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$ ಗಳಂತಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು x, y. ಎಂಬ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$ ಗಳಂತಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಮೂರು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಇಂತಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಕುರಿತು ವಿವರವಾಗಿ ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $x^2 + x - 5$ (iii) 5
   (iv) $3x^6 + 6y^3 - 7$ (v) $4 - y^2$ (vi) $5t - \sqrt{3}$
2. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾವುವು? ಯಾವುವು ಅಲ್ಲ? ಕಾರಣ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿರಿ.
   (i) $3x^2 - 2x + 5$ (ii) $x^2 + \sqrt{2}$ (iii) $p^2 - 3p + q$ (iv) $y + \frac{2}{y}, (y \neq 0)$
   (v) $5\sqrt{x} + x\sqrt{5}, (x > 0)$ (vi) $x^{100} + y^{100}$
3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ x^3 ನ ಸಹಗುಣಕವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) $x^3 + x + 1$ (ii) $2 - x^3 + x^2$ (iii) $\sqrt{2}x^3 + 5$ (iv) $2x^3 + 5$
   (v) $\frac{\pi}{2}x^3 + x$ (vi) $-\frac{2}{3}x^3$ (vii) $2x^2 + 5$ (vi) 4
4. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರಿ.
   (i) $5x^2 + x - 7$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x^2 + x + 4$ (iv) $x - 1$
   (v) $3p$ (vi) πr^2
5. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ, ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.
   (i) ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ.
   (ii) ಪ್ರತಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಒಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.
   (iii) ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ 3 ಸಹ ಆಗಬಹುದು.
   (iv) ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಸೊನ್ನೆ.
   (v) $x^2 + 2xy + y^2$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ 2
   (vi) πr^2 ನ್ನುವುದು ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ.
6. 10 ನೇ ಪರಿಮಾಣ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ, ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

2.4(a) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು

1 $p(x) = x^2 + 5x + 4$ ಎಂಬ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.
$x = 1$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(x)$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ನಾವು $p(x)$ ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ x ಬೆಲೆಗೆ 1ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಬೇಕು.

ಇದು ಮಾಡುವುದರಿಂದ $p(1) = (1)^2 + 5(1) + 4,$

$= 1 + 5 + 4 = 10$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 1$ ಬಳಿ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆ 10ಆಗಿದೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $p(x)$ ನಲ್ಲಿ $x = 0$ ಮತ್ತು $x = -1$

$$p(0) = (0)^2 + 5(0) + 4 \qquad p(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 4$$
$$= 0 + 0 + 4 \qquad = 1 - 5 + 4$$
$$= 4 \qquad = 0$$

$p(-4)$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ ?

1 ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$\begin{aligned} s(y) &= 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 6 \\ s(1) &= 4(1)^4 - 5(1)^3 - (1)^2 + 6 \\ &= 4(1) - 5(1) - 1 + 6 \\ &= 4 - 5 - 1 + 6 \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$s(-1) =$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x = 1$ ಬಳಿ $p(x) = 4x^2 - 3x + 7$

(ii) $y = 1$ ಬಳಿ $q(y) = 2y^3 - 4y + \sqrt{11}$

(iii) $t = p,\ t \in R$ ಬಳಿ $r(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 6$

(iv) $z = 1$ ಬಳಿ $s(z) = z^3 - 1$

(v) $x = 1$ ಬಳಿ $p(x) = 3x^2 + 5x - 7$

(vi) $z = 2$ ಬಳಿ $q(z) = 5z^3 - 4z + \sqrt{2}$

1 ಮತ್ತೆ ಈಗ ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $r(t) = t - 1$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$r(1)$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? $r(1) = 1 - 1 = 0$

$r(1) = 0,$ ಆದ್ದರಿಂದ $r(t)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ 1 ಆಗುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ x ಚರಾಕ್ಷರದಿಂದ ಹೊಂದಿದ ಬಹುದೋಕ್ತಿ $p(x) = 0$, ಆದಾಗ x ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಶೂನ್ಯಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p\ (x)$ನ ಮೂಲ ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$f(x) = x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x + 1$ ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮ ಮಾಡುವ ಮೂಲಕ ಬಂದಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಇರುತ್ತೀರಿ. ಅಂದರೆ $x + 1 = 0$, ಆದಾಗ $x = -1$ ಬಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ಎನ್ನುವುದು x ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದರೆ $f(x) = 0$ ನ್ನು x ನಲ್ಲಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $f(x) = 0$ ಆದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ '-1' ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x + 1$ ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

- ಈಗ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ 3ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದರ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಇದಕ್ಕೆ ಶೂನ್ಯಬೆಲೆ ಇಲ್ಲ $3 = 3x^0$ ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಾದರೂ $3x^0$ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ (ಸ್ಥಿರಾಂಕ)ಗೆ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $2x - 3$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x + 5$

ಉದಾಹರಣೆ-1: $p(x) = x + 2$ ಆದರೆ $p(1), p(2), p(-1)$ ಮತ್ತು $p(-2)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 1, 2, -1 ಮತ್ತು -2 ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವವು $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ ?

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = x + 2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

x ಗೆ ಬದಲು 1 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$p(1) = 1 + 2 = 3$

ಹಾಗೆಯೇ x ಗೆ ಬದಲು 2 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$p(2) = 2 + 2 = 4$

x ಗೆ ಬದಲು -1 ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$p(-1) = -1 + 2 = 1$

x ಬದಲು -2 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$p(-2) = -2 + 2 = 0$

ಇದರಿಂದ , 1 , 2, -1 ಎಂಬುವವು ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಆಗಲಿಲ್ಲ. $p(-2)=0$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ -2 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ-2: $p(x) = 3x + 1$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂದರೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

$p(x) = 0$ ನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದೇ?

ಅಂದರೆ $3x + 1 = 0$

$3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ $3x + 1$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ $-\frac{1}{3}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ-3: ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $2x - 1$ ರ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅಂದರೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಮೀಕರಣ $p(x) = 0$ನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದೇ

ಆದ್ದರಿಂದ $p(x) = 2x\text{-}1$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. $2x - 1 = 0$ಆಗುತ್ತದೆ.

$x = \frac{1}{2}$ (ಹೇಗೆ ?)

$P\left(\frac{1}{2}\right)$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

2.4(b) ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ

ಈಗ $p(x) = ax + b,\ a \neq 0,$ ಆದರೆಇದನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದರ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಿ? ?

$p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, $p(x) = 0$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ $ax + b = 0,\ a \neq 0$

ಆದ್ದರಿಂದ $ax = -b$

ಎಂದರೆ., $x = \frac{-b}{a}$

ಆದ್ದರಿಂದ , $x = \frac{-b}{a}$ ಎನ್ನುವುದು $p(x) = ax + b$ ನ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ಕೆಳಗಿನ ಖಾಲಿಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ :

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಶೂನ್ಯಬೆಲೆ
$x + a$	$-a$
$x - a$	-------------
$ax + b$	-------------
$ax - b$	$\frac{b}{a}$

ಉದಾಹರಣೆ-4: $x^2 - 3x + 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ 2 ಮತ್ತು 1 ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ಶೂನ್ಯಗಳಾಗುತ್ತವೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = x^2 - 3x + 2$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

x ಗೆ ಬದಲು 2 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$$
$$= 4 - 6 + 2 = 0$$

ಹಾಗೆಯೇ x ನ್ನು 1 ರಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ

$$p(1) = (1)^2 - 3(1) + 2$$
$$= 1 - 3 + 2$$
$$= 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ 2 ಮತ್ತು 1 ಎಂಬುವವು ಎರಡೂ $x^2 - 3x + 2$ ರ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಆಗಿವೆ.

ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಲು ಮತ್ತೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಧಾನ ಇದೆಯಾ?

$x^2 - 3x + 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಎಷ್ಟು? ಇದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ? ಅಲ್ಲ. ಇದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಎರಡು ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ-5. $x^2 + 2x - a$. ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ 3 ಆದರೆ 'a' ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = x^2 + 2x - a$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ 3 ಆದ್ದರಿಂದ $p(3) = 0$.

$$x^2 + 2x - a = 0$$

$x = 3$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $(3)^2 + 2(3) - a = 0$

$$9 + 6 - a = 0$$
$$15 - a = 0$$
$$-a = -15$$

ಅಥವಾ $a = 15$

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ.

1. $x^2 + 1$ ರಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಗಳಿಲ್ಲ ಏಕೆ ?
2. ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎರಡು ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ 'n' ಪರಿಮಾಣ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎಷ್ಟು ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆಯೋ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.2

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $4x^2 - 5x + 3$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = \frac{1}{2}$

2. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ $p(0), p(1)$ ಮತ್ತು $p(2)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $p(y) = 2 + y + 2y^2 - y^3$

(iii) $p(z) = z^3$ (iv) $p(t) = (t-1)(t+1)$

(v) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ 'x' ನ ಯಾವ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

(i) $p(x) = 2x + 1; x = -\frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{-3}{2}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1; x = \pm 1$ (iv) $p(x) = (x-1)(x+2); x = -1, -2$

(v) $p(y) = y^2; y = 0$ (vi) $p(x) = ax + b; x = -\frac{b}{a}$

(vii) $f(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $f(x) = 2x - 1, x = \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$

4. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $f(x) = x + 2$ (ii) $f(x) = x - 2$ (iii) $f(x) = 2x + 3$

(iv) $f(x) = 2x - 3$ (v) $f(x) = x^2$ (vi) $f(x) = px, p \neq 0$

(vii) $f(x) = px + q, p \neq 0, p\ q$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

5. $p(x) = 2x^2 - 3x + 7a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ 2 ಆದರೆ a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ 0 ಮತ್ತು 1 ಎನ್ನುವವು ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಆದರೆ $a\ b$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2.5 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದು

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(i) 25 ಮತ್ತು 3 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. 25 ನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.ನಮಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ 8 ಮತ್ತು ಶೇಷ 1 ಬರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಭಾಜ್ಯ = (ಭಾಜಕ × ಭಾಗಲಬ್ಧ) + ಶೇಷ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ

$25 = (8 \times 3) + 1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ 20 ನ್ನು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ $20 = (4 \times 5) + 0$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷ 'ಸೊನ್ನೆ 'ಯಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ 5 ನ್ನು 20 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೇ 20 ನ್ನು **5** ರ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸಿವ ಹಾಗೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಹ ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದೇ? ನೋಡೋಣ.

(ii) $3x^3 + x^2 + x$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ $(x\neq 0)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

ನಮಗೆ $(3x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$

$= 3x^2 + x + 1$

x ಎನ್ನುವುದು ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x^3 + x^2 + x$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು

$3x^3 + x^2 + x$ ನ್ನು $x(3x^2 + x + 1)$ ಎಂದು ಬ ರೆಯಬಹುದು.

ಮತ್ತೆ $3x^3 + x^2 + x$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳಾವುವು ?

(iii) ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ $(2x^2 + x + 1) \div x$ $(x\neq 0)$ ನ್ನು ನೋಡೋಣ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;2x+1 \\ \hline
x & 2x^2+x+1 \\
 & -2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad x+1 \\
 & \qquad -x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 1 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

ಇಲ್ಲಿ, $(2x^2 + x + 1) \div x = \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$

$= 2x + 1 + \frac{1}{x}$

ಇದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ?

ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪದ $\frac{1}{x}$ ಎನ್ನುವುದು ಋಣಾತ್ಮಕ ಘಾತಾಂಕವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (ಅಂದರೆ. $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

$\therefore$ $2x + 1 + \frac{1}{x}$ ಎನ್ನುವುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ.

ಆದರೆ ಈ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ

$(2x^2 + x + 1) = [x \times (2x + 1)] + 1$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ '1' ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ಉಳಿದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಎರಡು ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು $(2x + 1)$ ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ, 'x' ನ್ನು ಭಾಜಕ ಮತ್ತು '1' ನ್ನು ಶೇಷ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಶೇಷ 'ಸೊನ್ನೆಗೆ' ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ, 'x'ನ್ನು $2x^2 + x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಅಪವರ್ತನ ಅಲ್ಲವೆಂದು ನಾವು ಗುರ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. $3y^3 + 2y^2 + y$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು 'y' ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು $y\neq 0$ ಭಾಗಾಕಾರದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. $4p^2 + 2p + 2$ ನ್ನು '$2p$' ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು $p\neq 0$ ಭಾಗಾಕಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ-5: $3x^2 + x - 1$ ನ್ನು $x + 1$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ಮತ್ತು $q(x) = x + 1$ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ.

$p(x)$ ನ್ನು $q(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಹಂತ 1: $\frac{3x^2}{x} = 3x$ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಅದು ಭಾಗಲಬ್ದದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆ ಪದ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ x+1\overline{)\,3x^2+x-1} \\ 3x^2+3x \\ -\quad - \\ \hline -2x-1 \\ -2x-2 \\ +\quad + \\ \hline +1 \\ \hline \end{array}$$

ಹಂತ 2 : $(x + 1)\ \ 3x = 3x^2 + 3x$ (ಗುಣಿಸಿದಾಗ)

$3x^2 + 3x$ ನಿಂದ $3x^2 + x$ ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ $(-2x)$ ಬಂದಿದೆ.

ಹಂತ 3 : $\dfrac{-2x}{x} = -2$ (ಭಾಗಿಸಿದಾಗ) ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆ ಪದ ಆಗಿದೆ.

ಹಂತ 4 : $(x + 1)(-2) = -2x - 2$ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಇದನ್ನು

$(-2x - 1)$, ನಿಂದ ಕಳೆದಾಗ '1' ಬರುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 5 : ಶೇಷ 1, ಬಂದಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಲ್ಲಿಸೋಣ. ಇದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. (ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಏಕೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲವೋ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?)

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ $(3x - 2)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $(+1)$ ಬಂದಿವೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಲಿ ಇಲ್ಲವೇ ಶೇಷದ ಪರಿಮಾಣ, ಭಾಜಕ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$3x^2 + x - 1 = (x + 1)\ (3x - 2) + 1$

ಅಂದರೆ ಭಾಜ್ಯ = (ಭಾಜಕ × ಭಾಗಲಬ್ಧ) + ಶೇಷ

ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನಲ್ಲಿ x ಗೆ ಬದಲು -1 ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + x - 1 \\ p(-1) &= 3(-1)^2 + (-1) - 1 \\ &= 3(+1) + (-1) - 1 = 1. \end{aligned}$$

ಇದರಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸುವದೆನೆಂದರೆ $p(-1)$ನ ಬೆಲೆ, ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಶೇಷ (1) ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಇದು ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ನ್ನು $(x + 1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬಂದ ಶೇಷ, $p\,(-1)$ ನ ಬೆಲೆ ಅಂದರೆ $x + 1$ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ (*i.e.* $x = -1$) ಸಮಾನ ಆಗಿವೆ.

ನಾವು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$\begin{array}{r} 2x^3-2x^2-2x-5 \\ x-1\overline{)\,2x^4-4x^3-3x-1} \\ 2x^4-2x^3 \qquad\qquad \\ -\quad + \qquad\qquad \\ \hline -2x^3-3x-1 \\ -2x^3+2x^2 \quad \\ +\quad - \quad \\ \hline -2x^2-3x-1 \\ -2x^2+2x \quad \\ +\quad - \quad \\ \hline -5x-1 \\ -5x+5 \\ +\quad - \\ \hline -6 \\ \hline \end{array}$$

ಉದಾಹರಣೆ-7. $2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x - 1)$, $(x\neq 1)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಶೇಷವನ್ನು, ಭಾಜಕದ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

ಉದ್ದ ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ, ನಾವು ಮೊದಲು $2x^4$, x ನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುತ್ತದೆಯೋ ನೋಡಬೇಕು.

$$\frac{2x^4}{x} = 2x^3$$

ಈಗ $(x - 1)\ (2x^3) = 2x^4 - 2x^3$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಮತ್ತೆ ಶೇಷದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆ ಪದವನ್ನು ನೋಡಬೇಕು. (ಅಂದರೆ $-2x^3$)ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ $2x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ ಮತ್ತು ಶೇಷ -6 ಬಂದಿದೆ.

ಈಗ $(x - 1)$ ರ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ 1 ಆದ್ದರಿಂದ

$x = 1$ ನ್ನು $f(x)$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\ &= 2(1) - 4(1) - 3(1) - 1 \\ &= 2 - 4 - 3 - 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಬಂದ ಶೇಷ ಮತ್ತು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $f(x)$ ಗೆ $(x - 1)$ ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಸಮವೇನಾ?

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷವನ್ನು, ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದೆಯೇ ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ :

$\boldsymbol{p(x)}$ ನ್ನು ಒಂದು ಏಕ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗರಿಷ್ಟ ಪರಿಮಾಣಗಳಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು '$\boldsymbol{a}$' ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ $\boldsymbol{p(x)}$ ನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $\boldsymbol{(x - a)}$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ $\boldsymbol{p(a)}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ: ಏಕ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗರಿಷ್ಟ ಪರಿಮಾಣಗಳಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$p(x)$ ನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $g(x) = (x - a)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $r(x)$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ $p(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಎಂಬುವವು ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಆದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $p(x)$ ನ ಪರಿಮಾಣ $\geq g(x)$ ನ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು $g(x) \neq 0$ ಆದರೆ ನಮಗೆ $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬ ಮತ್ತೆರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಇಲ್ಲವೇ $r(x)$ ಪರಿಮಾಣ ಯಾವಾಗಲೂ $g(x)$ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ

$p(x) = g(x) \,.\, q(x) + r(x)$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore p(x) = (x - a) \,.\, q(x) + r(x) \qquad \because g(x) = (x - a)$

$(x - a)$ ಪರಿಮಾಣ 1 ಮತ್ತು $r(x)$ ಪರಿಮಾಣ $(x - a)$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

$\therefore$ ಇದನ್ನು K ಎಂದುಕೊಂಡರೆ, ಪ್ರತಿ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆ x ಗೆ $r(x) = \mathrm{K}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x) = (x - a)\, q(x) + \mathrm{K}$

$x = a$, ಆದಾಗ $p(a) = (a - a)\, q(a) + \mathrm{K}$

$$\begin{aligned} &= 0 + \mathrm{K} \\ &= \mathrm{K} \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ ಋಜುವಾತು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದೆಯೇ ಪ್ರಮೇಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೋ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ-8: $x^3 + 1$ ನ್ನು $(x + 1)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $p(x) = x^3 + 1$

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x + 1$ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ -1 $[x + 1 = 0$ ಆದ್ದರಿಂದ $x = -1]$

x ನಲ್ಲಿ -1ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ $(x^3 + 1)$ ನ್ನು $(x + 1)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 'ಸೊನ್ನೆ' ಶೇಷ ಬಂದಿದೆ.

ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ $x^3 + 1$ ನ್ನು $x + 1$ ನಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ $(x + 1)$ ನ್ನು $(x^3 + 1)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

ಉದಾಹರಣೆ-9: $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(x - 2)$ ಅಪವರ್ತನವೇ? ಪರಿಕ್ಷೀಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(x - 2)$ ಅಪವರ್ತನ ಆಗುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ

$(x - 2)$ ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ 2ರಿಂದ xಗೆ ಬದಲು ಆದೇಶಿಸಬೇಕು. *i.e.* $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 4 \\ &= 8 - 2(4) - 10 + 4 \\ &= 8 - 8 - 10 + 4 \\ &= -6. \end{aligned}$$

ಶೇಷ 'ಸೊನ್ನೆ'ಗೆ ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(x - 2)$ ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ-10 : $p(y) = 4y^3 + 4y^2 - y - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $(2y + 1)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆಯೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(y)$ ನ್ನು $(2y + 1)$ ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ $p(y)$ ಗೆ $(2y + 1)$ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ $2y + 1$ ರ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ $y = \dfrac{-1}{2}$,

$p(y)$ ನಲ್ಲಿ $\frac{-1}{2}$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$p\left(\frac{-1}{2}\right)=4\left(\frac{-1}{2}\right)^3+4\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\left(\frac{-1}{2}\right)-1$$

$$=4\left(\frac{-1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-1$$

$$=\frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2}-1$$

$$=0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(2y+1)$ ಎನ್ನುವುದು $p(y)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೂಲಕ $p(y)$ ಎನ್ನುವುದು $(2y+1)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತ್ಯವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ-11: ax^3+3x^2-13 ಮತ್ತು $2x^3-5x+a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು $(x-2)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷಗಳು ಸಮವಾದರೆ a ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = ax^3+3x^2-13$ ಮತ್ತು $q(x) = 2x^3-5x+a$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\because$ $p(x)$ ಮತ್ತು $q(x)$ ಗಳನ್ನು $(x-2)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷಗಳು ಸಮ

$\therefore$ $p(2)=q(2)$

$$a(2)^3+3(2)^2-13=2(2)^3-5(2)+a$$

$$8a+12-13=16-10+a$$

$$8a-1=a+6$$

$$8a-a=6+1$$

$$7a=7$$

$$a=1$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.3

1. x^3+3x^2+3x+1 ನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x+1$ (ii) $x-\frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x+\pi$

   (v) $5+2x$

2. x^3-px^2+6x-p ನ್ನು $x-p$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು?

3. $2x^2 - 3x + 5$ ನು $2x - 3$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು? ಇದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಖಚ್ಚಿತ್ತವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲದೇ? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.
4. $9x^3 - 3x^2 + x - 5$ ನ್ನು $x - \frac{2}{3}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು?
5. $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ ಮತ್ತು $x^3 + x^2 - 4x + a$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು $(x - 2)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳು ಸಮವಾದರೆ a ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $x^3 + ax^2 + 5$ ಮತ್ತು $x^3 - 2x^2 + a$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು $(x + 2)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳು ಸಮವಾದರೆ a ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ ನ್ನು $g(x) = x - 2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಿಜವಾದ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
8. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 3$ ನ್ನು $g(x) = 1 - 2x$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು? ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
9. $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x - 2)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 2 ಮತ್ತು $(x + 2)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ -2 ಬಂದರೆ a, b ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2.6 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆ

$p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $q(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಬಂದರೆ $q(x)$ ನ್ನು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ ನ್ನು $g(x) = 2x + 1$ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಬಂದರೆ

$4x^3 + 4x^2 - x - 1 = q(x)\,(2x + 1) + 0$ ಎಂದು ಭಾಗಾಕಾರ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x) = q(x)\,(2x + 1)$

ಆದ್ದರಿಂದ $g(x) = 2x + 1$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ನೀವು ಈಗ ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ ಆಧಾರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ : ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಪರಿಮಾಣ $n \geq 1$ ಯಾಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ಮತ್ತು 'a' ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ (i) $p(a) = 0$ ಆದರೆ $(x - a)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು (ii) $(x - a)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನ ಆದರೆ $p(a) = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸರಳವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$p(x) = (x - a)\; q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ ಆದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $p(x) = (x - a)\,q(x) + 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$= (x - a)\,q(x)$

ಇದರಿಂದ $p(x)$ ಗೆ $(x-a)$ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

(ii) ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $(x-a)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನ ಆದ್ದರಿಂದ $p(x) = (x-a)\,q(x)$ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ $q(x)$ಎನ್ನುವುದು ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

$$\therefore\ p(a) = (a-a)\,q(a) = 0$$

$\therefore$ ಆದ್ದರಿಂದ $(x-a)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $p(a) = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಪ್ರಮೇಯ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ

ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ-12: $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(x+2)$ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆಯೇ?

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ ಮತ್ತು $g(x) = x + 2$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$g(x)$ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ -2

ಆದ್ದರಿಂದ $p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) + 6$

$$= -8 + 2(4) - 6 + 6$$
$$= -8 + 8 - 6 + 6$$
$$= 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ, $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ ಗೆ $(x+2)$ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ-13: $2x^3 - 9x^2 + x + \text{K}$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(2x-3)$ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ K ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $(2x-3)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + \text{K}$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಅಪವರ್ತನ.

$(2x-3) = 0$ ಆದರೆ $x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $(2x-3)$ ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ $\frac{3}{2}$

ಅದರಿಂದ $(2x-3)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನ ಆದರೆ $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + \text{K},$

$$\Rightarrow p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + \text{K} = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + \text{K} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + \text{K} = 0\right) \times 4$$

$$27 - 81 + 6 + 4K = 0$$
$$-48 + 4K = 0$$
$$4K = 48$$
ಆದ್ದರಿಂದ $K = 12$

ಉದಾಹರಣೆ-14: $(x - 1)$ ಎನ್ನುವುದು $x^{10} - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $x^{11} - 1$ ಕ್ಕೆ ಸಹ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = x^{10} - 1$ ಮತ್ತು $g(x) = x^{11} - 1$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$(x - 1)$ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು $p(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಬೇಕೆಂದರೆ $p(1) = 0$ ಮತ್ತು $g(1) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ

$p(x) = x^{10} - 1$ ಮತ್ತು $g(x) = x^{11} - 1$

$p(1) = (1)^{10} - 1$ ಮತ್ತು $g(1) = (1)^{11} - 1$

$= 1 - 1$ $\qquad = 1 - 1$

$= 0$ $\qquad = 0$

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

$x^n - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(x-1)$ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$(x - 1)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ನಾವು ಈಗ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ax^2+bx+c, $(a \neq 0$ ಮತ್ತು a, b, c ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು)ನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(px + q)$ ಮತ್ತು $(rx + s)$ ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ $ax^2 + bx + c = (px + q)\ (rx + s)$

$$= prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

x^2, x ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸರಿಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$a = pr$

$b = ps + qr$

$c = qs$ ಎಂದು ಬರುತ್ತವೆ.

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ x ನ ಸಹ ಗುಣಕ 'b' ಎನ್ನುವುದು ps ಮತ್ತು qr ಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.

$(ps)\ (qr) = (pr)(qs)$

$= ac$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದರಿಂದ $ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆಯಲ್ಲಿ b ಎನ್ನುವುದು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂದೂ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ac ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ-15 : $3x^2 + 11x + 6$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p\ q$ ಗಳು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $p + q = 11$ ಮತ್ತು $pq = 3 \times 6 = 18$ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ $p,\ q$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದರೆ

18 ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ,

(1, 18), (2, 9), (3, 6) ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ, (2, 9) ಜೊತೆ $p + q = 11$ ನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $3x^2 + 11x + 6 = 3x^2 + 2x + 9x + 6$

$= x(3x + 2) + 3(3x + 2)$

$= (3x + 2)(x + 3).$

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿರಿ.

1. $6x^2 + 19x + 15$ 2. $10m^2 - 31m - 132$ 3. $12x^2 + 11x + 2$

ಈಗ ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ-16 : $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - 3x + 2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೀರಿ?

ಪರಿಹಾರ : ಭಾಜಕ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ. ಇದು ಒಂದು ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಮಧ್ಯ ಪದವನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ ಅಲ್ಲವೆ! ಆ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$

$= x(x - 2) - 1(x - 2)$

$= (x - 2)(x - 1).$

$2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $x^2 - 3x + 2$ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ತೋರಿಸಬೇಕೆಂದರೆ, $(x - 2)$ ಮತ್ತು $(x - 1)$ ಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$p(x)$ ಗೆ $(x - 2)$ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $p(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$

$= 2(16) - 6(8) + 3(4) + 6 - 2$

$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$

$= 50 - 50$

$= 0$

$p(2) = 0$ ಆದ್ದರಿಂದ $p(x)$ ಗೆ $(x - 2)$ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಅಪವರ್ತನ $(x - 1)$, $p(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗಬೇಕಂದರೆ,

$$\begin{aligned} p(1) &= 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2 \\ &= 2(1) - 6(1) + 3(1) + 3 - 2 \\ &= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$p(1) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(x - 1)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

$(x - 2)$ ಮತ್ತು $(x - 1)$ ಎರಡೂ $p(x)$ ಗೆ ಅಪರ್ತನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $x^2 - 3x + 2$ ಸಹ $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ-17: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಇವುಗಳಿಂದ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ $p(1) = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ. (ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ $p(x)$ ಗೆ $(x - 1)$ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ.

ನಂತರ $p(x)$ ನ್ನು $(x - 1)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ $x^2 - 22x + 120$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಅಪವರ್ತಿಸವಿಕೆಯನ್ನು ಪರ್ಯಾಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮಾಡಿನೋಡೋಣ.

$$\begin{aligned} x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\ &= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad \text{(why?)} \\ &= (x - 1)(x^2 - 22x + 120) \end{aligned}$$

ಈಗ $x^2 - 22x + 120$ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಧ್ಯ ಪದವನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 12)(x - 10) \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ $(x + 1)$ ಅಪವರ್ತನ ವಾಗುತ್ತದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(i) $x^3 - x^2 - x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(iii) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (3 - \sqrt{3})\, x + \sqrt{3}$

2. ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ f(x) ಗೆ $g(x)$ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೊ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 1,\ g(x) = x + 1$

(ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 1$

(iii) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 2$

(iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12,\ g(x) = 3x - 2$

(v) $f(x) = 4x^3 + 20x^2 + 33x + 18,\ g(x) = 2x + 3$

3. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ ಗೆ $(x - 2), (x + 3)$ ಮತ್ತು $(x - 4)$ ಗಳು ಅಪವರ್ತನಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

4. $x^3 - 6x^2 - 19x + 84$ ಗೆ $(x + 4), (x - 3)$ ಮತ್ತು $(x - 7)$ ಗಳು ಅಪವರ್ತನಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5. $px^2 + 5x + r$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(x - 2)$ ಮತ್ತು $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $p = r$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $(x^2 - 1)$ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $a + c + e = b + d = 0$

7. ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ. (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $y^3 + y^2 - y - 1$

8. $ax^2 + bx + c$ ಮತ್ತು $bx^2 + ax +$ c ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ $x + 1$ ಆದರೆ $c = 0$ ಮತ್ತು $a =$ b ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

9. $x^2 - x - 6$ ಮತ್ತು $x^2 + 3x - 18$ ಗಳಿಗೆ $(x - a)$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ a ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $y^3 - 2y^2 - 9y + 18$ ರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ $(y - 3)$ ಆದರೆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2.6 ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೂ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸತ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆಂದು ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ.

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ I : $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ II : $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ III : $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ IV : $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab.$

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಥವಾ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಸಾಧನೆ :

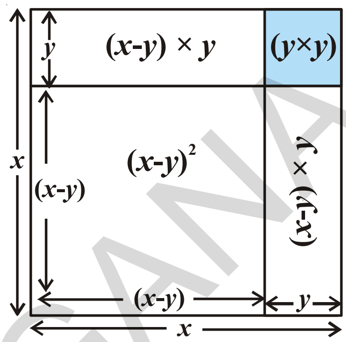
ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ $(x - y)^2$ ಗೆ

ಹಂತ -I : ಬಾಹು 'x' ಆಗಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಹಂತ-II : 'x' ನಿಂದ 'y' ಉದ್ದವನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಹಂತ-III : $(x - y)^2$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

$$= x^2 - [(x - y)y + (x - y)y + y^2]$$
$$= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2$$
$$= x^2 - 2xy + y^2$$



ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಹ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

(i) $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

(iii) $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(x + 5)(x + 5)$ (ii) $(p - 3)(p + 3)$ (iii) $(y - 1)(y - 1)$

(iv) $(t + 2)(t + 4)$ (v) 102×98

ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ-18: ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $9x^2 - 25$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ (iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಇಲ್ಲಿ $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4 + 1)x + (4)(1)$

ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$ ಎಂಬ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ $(x + 4)(x + 1)$ ನಮಗೆ ಬರುತ್ತದೆ.

(ii) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2$

ಇದನ್ನು, $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$ ಎಂಬ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$\therefore\ 9x^2 - 25 = (3x+5)\,(3x-5)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(iii) ಇಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a)^2 + 2(5a)\,(4b) + (4b)^2$

ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $x^2 + 2xy + y^2$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$x = 5a$ ಮತ್ತು $y = 4b$ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

$\mathbf{(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2}$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

ನಮಗೆ $25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)^2$

$= (5a + 4b)\,(5a + 4b)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(iv) ಇಲ್ಲಿ, $49x^2 - 112xy + 64y^2$ ನಮಗೆ

$49x^2 = (7x)^2, \quad 64y^2 = (8y)^2$ ಮತ್ತು

$112\,xy = 2(7x)\,(8y)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ

$\mathbf{(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2}$ ಜೊತೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

ನಮಗೆ $49x^2 - 112xy + 64y^2 = (7x)^2 - 2(7x)\,(8y) + (8y)^2$

$= (7x - 8y)^2$

$= (7x - 8y)\,(7x - 8y)$ ಆಗಿದೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{y^2}{9}$

(iii) $t^2 - 2t + 1$ (iv) $x^2 + 3x + 2$

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಬಳಸಿದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಲ್ಲವೂ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದವು. ಈಗ ನಾವು ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ $x + y + z$ ನ ವರ್ಗ $(x + y + z)^2$ ವಿಸ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

$x + y = t$ ಆದರೆ $(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$ (ಮೊದಲ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಆಧಾರವಾಗಿ)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)\,z + z^2$ ('t'ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

ಪದಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದಾಗ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ ಆಗಿದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಪದ್ಧತಿ :

$(x + y + z)^2$ ನ್ನು ಪದಗಳ ಪುನಃ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$[(x + y) + z]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y)(z) + (z)^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ [ಮೊದಲ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದಿಂದ]

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಇತರ ವಿಧಗಳಾಗಿ ಪದಗಳನ್ನು ಪುನಃ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಿ ವಿಸ್ತರಣೆ ಮಾಡಬಹುದು?

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೀವು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣV : $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

ಉದಾಹರಣೆ-19: $(2a + 3b + 5)^2$ ನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಕೊಟ್ಟ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x + y + z)^2$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$x = 2a$, $y = 3b$ ಮತ್ತು $z = 5$ ಬರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ V, ಮೂಲಕ ನಾವು

$(2a + 3b + 5)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (5)^2 + 2(2a)(3b) + 2(3b)(5) + 2(5)(2a)$

$= 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 30b + 20a.$

ಉದಾಹರಣೆ20: $(5x - y + z)(5x - y + z)$ ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $(5x - y + z)(5x - y + z) = (5x - y + z)^2$

$= [5x + (-y) + z]^2$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ V, $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$, ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

ನಮಗೆ $(5x + (-y) + z)^2 = (5x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(5x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(5x)$

$= 25x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 2yz + 10zx.$

ಉದಾಹರಣೆ-21. $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನಮಗೆ

$4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$

$= [(2x)^2 + (-3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(-3y)(5z) + 2(5z)(2x)]$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ V ರೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx,$ ನಮಗೆ

$$= (2x - 3y + 5z)^2$$

$$= (2x - 3y + 5z)\,(2x - 3y + 5z).$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

(i) $(p + 2q + r)^2$ ನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) $(4x - 2y - 3z)^2$ ನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

(iii) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ca$ ನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಎರಡನೆ ಪರಿಮಾಣ ಪದಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ I ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $(x + y)^3$ ವಿಸ್ತರಣೆ ಮಾಡಿರಿ.

ನಮಗೆ

$$\begin{aligned}
(x + y)^3 &= (x + y)^2\,(x + y) \\
&= (x^2 + 2xy + y^2)\,(x + y) \\
&= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\
&= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
&= x^3 + 3xy\,(x + y) + y^3 \\
&= x^3 + y^3 + 3xy(x + y).
\end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ VI : $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

$(x - y)^3$ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೆಯೇ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಿ? ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

ಇದರಿಂದ ನಾವು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ VII : $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$

$$\equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ-22: ಕೆಳಗಿನ ಘನಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) $(2a+3b)^3$ (ii) $(2p-5)^3$

ಪರಿಹಾರ : ಕೊಟ್ಟ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x+y)^3$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ $x = 2a$ ಮತ್ತು $y = 3b$ ಎಂದು ನಾವು ವೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ VI, ಬಳಸಿದರೆ

$$(2a+3b)^3 = (2a)^3 + (3b)^3 + 3(2a)(3b)\,(2a+3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 18ab\,(2a+3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54\,ab^2$$
$$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$$

(ii) ಕೊಟ್ಟ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x-y)^3$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ $x = 2p$ ಮತ್ತು $y = 5$ ಎಂದು ನಾವು ವೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ VII , ಬಳಸಿದರೆ

$$(2p-5)^3 = (2p)^3 - (5)^3 - 3(2p)(5)\,(2p-5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 30p\,(2p-5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 60p^2 + 150p$$
$$= 8p^3 - 60p^2 + 150p - 125.$$

ಉದಾಹರಣೆ-23: ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.

(i) $(103)^3$ (ii) $(99)^3$

ಪರಿಹಾರ : (i) ನಮಗೆ

$(103)^3 = (100+3)^3$

ಇದನ್ನು $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$$= (100)^3 + (3)^3 + 3(100)\,(3)\,(100+3)$$
$$= 1000000 + 27 + 900(103)$$
$$= 1000000 + 27 + 92700$$
$$= 1092727.$$

(ii) ನಮಗೆ $(99)^3 = (100-1)^3$

ಇದನ್ನು $(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)\,(100-1)$$
$$= 1000000 - 1 - 300\,(99)$$

$= 1000000 - 1 - 29700$

$= 970299.$

ಉದಾಹರಣೆ-24: $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಕೊಟ್ಟ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆದರೆ

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\,(3y) + 3(2x)\,(3y)^2 + (3y)^3$$

ಇದನ್ನು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ $(x + y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,

ಇದನ್ನು $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3 = (2x + 3y)^3$

$= (2x + 3y)\,(2x + 3y)\,(2x + 3y)$ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬರುತ್ತವೆ..

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. $(x + 1)^3$ ನ್ನು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.
2. $(3m - 2n)^3$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.
3. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

ಈಗ $(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$= x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - xyz - \cancel{x^2z} + \cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^2z} - xyz + \cancel{x^2z} + \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{yz^2} - \cancel{xz^2}$$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿದಾಗ) ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ VIII : $\boxed{(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

ಉದಾಹರಣೆ25: ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$(2a + b + c)\,(4a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - bc - 2ca)$

ಪರಿಹಾರ : ಕೊಟ್ಟ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$= (2a + b + c)\,[(2a)^2 + b^2 + c^2 - (2a)(b) - (b)(c) - (c)\,(2a)]$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ VIII ರೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \equiv x^3+y^3+z^3-3xyz$

$= (2a)^3+(b)^3+(c)^3-3(2a)(b)(c)$

$= 8a^3+b^3+c^3-6abc$

ಉದಾಹರಣೆ26: $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಕೊಟ್ಟ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3+(-2b)^3+(-4c)^3 - 3(a)(-2b)(-4c)$

ಇದನ್ನು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VIII ರೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$x^3+y^3+z^3 - 3xyz \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx)$

ನಮಗೆ

$= (a-2b-4c)[(a)^2+(-2b)^2+(-4c)^2 - (a)(-2b) - (-2b)(-4c) - (-4c)(a)]$

$= (a-2b-4c)(a^2+4b^2+16c^2+2ab-8bc+4ca)$ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬರುತ್ತವೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ರಿ :

1. ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೆಯೇ $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc-ca)$ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $27a^3+b^3+8c^3-18abc$ ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ-27. ಒಂದು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $2x^2+9x-5$ ಆದರೆ ಆಯತದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಅನುಕೂಲ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಆಯತದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ l, b ಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2x^2+9x-5$

$lb = 2x^2+9x-5$

$= 2x^2+10x-x-5$

$= 2x(x+5)-1(x+5)$

$= (x+5)(2x-1)$

l, b ಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಅನುಕೂಲ ಅಳತೆಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$\therefore$ ಉದ್ದ $= (x + 5)$

ಅಗಲ $= (2x - 1)$

$x = 1$ ಆದರೆ $l = 6, \; b = 1$

$x = 2$ ಆದರೆ $l = 7, \; b = 3$

$x = 3$ ಆದರೆ $l = 8, \; b = 5$

....

....

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ?

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.5

1. ಸೂಕ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(x + 5)(x + 2)$ (ii) $(x - 5)(x - 5)$ (iii) $(3x + 2)(3x - 2)$

(iv) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ (v) $(1 + x)(1 + x)$

2. ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೆಯೇ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 101×99 (ii) 999×999 (iii) $50\frac{1}{2} \times 49\frac{1}{2}$

(iv) 501×501 (v) 30.5×29.5

3. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $4x^2 - \frac{y^2}{25}$ (iv) $18a^2 - 50$

(v) $x^2 + 5x + 6$ (vi) $3p^2 - 24p + 36$

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $(-2a + 5b - 3c)^2$

(iv) $\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 1\right)^2$ (v) $(p + 1)^3$ (vi) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

5. ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

(ii) $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab - 16bc - 24ca$

6. $a + b + c = 9$ ಮತ್ತು $ab + bc + ca = 26$ ಆದರೆ $a^2 + b^2 + c^2$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಕೆಳಗಿವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$ (iv) $(1001)^3$

8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $1 - 64a^3 - 12a + 48a^2$ (iv) $8p^3 - \frac{12}{5}p^2 + \frac{6}{25}p - \frac{1}{125}$

9. (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

ಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಹ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದೇ?

10. 9 ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ (i) $27a^3 + 64b^3$ (ii) $343y^3 - 1000$ ಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

11. ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

12. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

13. If $x + y + z = 0$ ಆದರೆ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

14. ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಘನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸದೆಯೇ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(-10)^3 + (7)^3 + (3)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $(0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3$

15. ಕೆಳಗಿನ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಅನುಕೂಲ ಅಳತೆಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $4a^2 + 4a - 3$ (ii) $25a^2 - 35a + 12$

16. ಕೆಳಗಿನ ಘನಗಳ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಘನದ ಅನುಕೂಲ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $3x^3 - 12x$ (ii) $12y^2 + 8y - 20$.

17. $2(a^2+b^2) = (a+b)^2$, ಆದರೆ $a = b$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ.

1. ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರ 'x' ನಲಿ 'n' ನೆ ಪರಿಮಾಣ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ್ನು $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1 x + a_0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.ಇದರಲ್ಲಿ $a_0, a_1, a_2,$ .... a_n ಗಳನ್ನು $x^0, x^1, x^2, ... x^n$ ಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $a_n x^n$; $a_{n-1}x^{n-1}$; .... a_0---------$a_n \neq 0.$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪದಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
2. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ, ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ, ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ ಮೊದಲಾದವುಗಳಾಗಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.
3. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ, ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ, ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಮೊದಲಾದವುಗಳಾಗಿ ಅವುಗಳ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.
4. p(x) ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ 'a' ಗೆ $p(a) = 0$ ಆದರೆ 'a' ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ 'a' ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಮೀಕರಣ $p(x) = 0$ ನ್ನು ಮೂಲ (root) ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
5. ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರ ಹೊಂದಿದ ಪ್ರತಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕಳಿಗೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ನಿರ್ವಹಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.
6. ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ : $p(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಏಕ ಪರಿಮಾಣ ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗರಿಷ್ಠ ಪರಿಮಾಣವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು 'a' ಎನ್ನುವುದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $(x - a)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ $p(a)$ ಆಗುತ್ತದೆ.
7. ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ : ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಪರಿಮಾಣ $n \geq 1$ ಯಾಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ಮತ್ತು 'a' ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ *(i)* $p(a) = 0$ ಆದರೆ $(x - a)$ ಎನ್ನುವದು $p(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು ಮತ್ತು *(ii)*$(x - a)$ ಎನ್ನುವುದು p(x) ಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ P $(a) = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.
8. ಹಾಗೆಯೇ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

   (i) $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

   (ii) $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

   (iii) $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

   (iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ also

   (v) $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

   (vi) $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆ ಪರೀಕ್ಷೆ

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}$ ಆದರೆ

'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

03 ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು

3.1 ಪರಿಚಯ :

ಸೇತುವೆಗಳು , ಆಣೆಕಟ್ಟುಗಳು, ಶಾಲಾ ಕಟ್ಟಡಗಳು, ವಸತಿಗೃಹಗಳು ಹಾಗೂ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗಳಂತಹ ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ಕಟ್ಟಡಗಳನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಇವೆಲ್ಲವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಇಂಜಿನಿಯರುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಜವಾಬ್ದಾರಿಯುತ ಸವಾಲಿನಿಂದ ಕೂಡಿದ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾರೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಾ? ಇದಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಖರ್ಚು ಸಿಮೆಂಟು, ಕಾಂಕ್ರೀಟು, ಕೂಲಿ ಖರ್ಚುಗಳಂಥವುಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಅವುಗಳ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಪರಿಮಾಣಗಳಮೇಲ್ಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಪರಿಮಾಣಗಳು ಅದರ ಬುನಾದಿ, ನಿರ್ಮಾಣ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಗೋಡೆಯ ಗಾತ್ರ, ಎತ್ತರ, ಮೇಲ್ಛಾವಣಿ ಇತ್ಯಾದಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ನಿರ್ಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಇವು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವ ವಿಧಾನವನು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನಾವು ದೈನಂದಿನ ಕಾರ್ಯಗಳಾದ ಚಿತ್ರಕಲೆ, ಕರಕುಶಲ ಕಲೆಗಳು, ನೆಲಕ್ಕೆ ಕಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಹಾಸಲು, ಹೊಲ ಉಳಿಮೆಗೆ, ಬೀಜ ಬಿತ್ತಲು ಹೀಗೆ ನಾನಾ ಕೆಲಸಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಒಂದೇ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಿಲ್ಲದ ಜೀವನವನ್ನು ಊಹಿಸಲಾರೆವು.

ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು, ಚೀನಾದ ಮಹಾಗೋಡೆ, ಭಾರತದ ದೇವಾಲಯಗಳು ಹಾಗೂ ಯಜ್ಞಕುಂಡಗಳು , ಫ್ರಾನ್ಸ್‌ನ ಈಫೆಲ್ ಟವರ್ ಇವು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅನ್ವಯಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಇತಿಹಾಸ, ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಿವಿಧ ಆಲೋಚನಾ ವಿಧಾನಗಳು, ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದ ರೀತಿ ಮತ್ತು ಆಧುನಿಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

3.2 ಇತಿಹಾಸ :

ನಿರ್ಮಾಣಗಳ ಆಕಾರಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತದಪರವಾಗಿ ಅನೇಕ ವಿಧಾನಗಳಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನಗಳೆ ಲ್ಲವೂ ರೇಖಾಗಣಿತ ಪರಿಧಿಯೊಳಗೆ ಬರುತ್ತವೆ. ಜ್ಯಾಮಿಟ್ರಿ ಎಂಬ ಆಂಗ್ಲ ಪದವು ಗ್ರೀಕ ಪದಗಳಾದ 'ಜಿಯೋ' ಅಂದರೆ ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ' ಮೆಟ್ರಾನ್ ' ಎಂದರೆ ಅಳೆಯುವುದು ಎಂಬ ಎರಡು ಪದಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಆಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅವಶೇಷಗಳನ್ನು ಸಿಂಧೂ ನಾಗರೀಕತೆ , ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯಾ ನಾಗರೀಕತೆಯ ಜನಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಅವರಿಗೆ ವಿಶಾಲ ಕೋನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿತ್ತು. 'ಭಕ್ಷ್ಯಾಲಿ ' ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯು ಅನೇಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅನಿಯಮಿತ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಸಿಂಧೂ ನಾಗರೀಕತೆಯ ಪ್ರಜೆಗಳ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅವಶೇಷಗಳು ಹರಪ್ಪಾ ಮತ್ತು ಮೆಹೆಂಜೋದಾರೋಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಉತ್ಖನನದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹೊರಬಿದ್ದಿವೆ. ಕ್ರಿ.ಪೂ 2500 ರಲ್ಲಿಯೇ ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಸಾಧನಗಳಿದ್ದುದಾಗಿ ಸಾಕ್ಷ್ಯಗಳು ದೊರೆತಿವೆ.

ವೈದಿಕ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸುಲಭ ಸೂತ್ರ ದಲ್ಲಿ ಯಜ್ಞಕುಂಡಗಳು ಹಾಗೂ ಹೋಮಕುಂಡಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಯಜ್ಞಕುಂಡಗಳ ನಿರ್ಮಾಣದ ಹಿಂದಿರುವ ಅದ್ಭುತ ವಿಷಯವೆಂದರೆ ಅವು ವಿವಿಧ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಅವು ಆಕ್ರಮಿಸುವ ಸ್ಥಳ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೇ. ಕ್ರಿ.ಪೂ.8 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿನ ಬೌದ್ಧಾಯನನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಬೌದ್ಧಾಯನ ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸರಳ ತ್ರಿವಳಿಗಳಿಂದ (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17)... ಮೊದಲಾದವು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಆಯತಗಳ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳಿಗೆ ಪೈಥಾಗರೊಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ಅನ್ವಯಿಸುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಎಲ್ಲ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಕಿರೀಟಪ್ರಾಯದಂತೆ ಭಾವಿಸಿದ್ದರು. ಅವರು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಅನೇಕ ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ, ವಕ್ರಗಳಿಗೆ, ಸಮತಲ ಹಾಗೂ ಘನಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ್ದರು. ತಾವು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸತ್ಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಭಾವನೆಯು ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಥೇಲ್ಸ್ ನಿಗಮನ ನಿರೂಪಣ ಪದ್ಧತಿ ಕುರಿತು ಆಲೋಚಿಸಲು ದಾರಿಮಾಡಿ ಕೊಟ್ಟಿತು.

ಅಯಾನಿಯಾಗೆ ಸೇರಿದ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನು ಥೇಲ್ಸ್ ಶಿಷ್ಯನೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತಾರೆ. ಈತನ ಹೆಸರಿನಮೇಲೆ 'ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ' ಎಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧಿ ಪಡೆದಿರುವ ಪ್ರಮೇಯ ಪೈಥಾಗರಸ್ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯದೇ ಹೋಗಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಆ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದವರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನಾಗಿರಬಹುದು. (325-265B.C) ರಲ್ಲಿ ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನ ಅಲೆಗ್ಸಾಂಡ್ರಿಯಾಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ 13 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿದ . ಇದರಲ್ಲಿ ವಾಖ್ಯೆಗಳು,ಸ್ವಯಂಸಿದ್ದಗಳು, ಸ್ವೀಕೃತಿ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು, ಪ್ರಮೇಯಗಳು , ಊಹೆ ಅಥವಾ ತರ್ಕವನ್ನಾಧರಿಸಿದ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ.

3.3 ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮೂಲಕಲ್ಪನೆಗಳು (Euclid's Elements of Geometry)

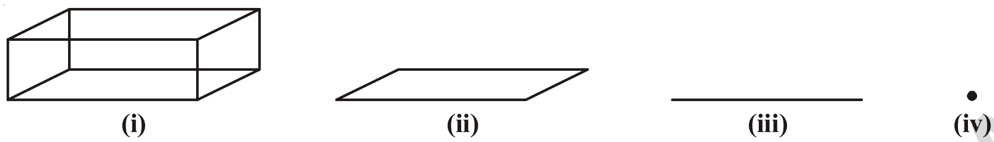
ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ತಾವು ಜೀವಿಸುತ್ತಿರುವ ಪ್ರಪಂಚದ ಒಂದು ಅಮೂರ್ತ ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಭಾವಿಸಿದ್ದಾನೆ. ತಮ್ಮ ಪರಿಸರದಿಂದ ಬಿಂದು, ರೇಖೆ, ಸಮತಲ ಅಥವಾ ಮೇಲ್ಮೈಗಳಂಥ ಅನೇಕ ಊಹಾಜನಿತ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದನು. ಪರಿಸರದಲ್ಲಿನ ಘನಾಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರದಲ್ಲಿನ ಘನಾಕೃತಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಮೂರ್ತ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿ ಘನಾಕೃತಿಯು ಒಂದು ಘನಫಲವನ್ನು, ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಸರಸಲು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ಅಂಚುಗಳು ಸಮತಲಗಳಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮತಲಗಳು ಘನಾಕೃತಿಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಂದರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ಸಮತಲಗಳಿಗೆ ದಪ್ಪವಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮತಲಗಳ ಅಂಚುಗಳು ಸರಳ ಅಥವಾ ವಕ್ರರೇಖೆಯಾಗಿರಬಹುದು. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಘನಗಳಿಂದ ಬಿಂದುವಿನವರೆಗಿನ ಮೂರು ಹಂತಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ (ಘನಗಳು -ಸಮತಲಗಳು -ರೇಖೆಗಳು -ಬಿಂದು).

ಮುಂದಿನ ಪುಟದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರಪಟದಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿರಿ. ಇದು ಒಂದು ಆಯತಘನದ ಚಿತ್ರ. ಇದಕ್ಕೆ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳಿವೆ, ಅಂದರೆ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ(ಚಿತ್ರ -i), ಇದು ಒಂದು ಅಳತೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡರೆ ಇದು ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದೇ ಆಯತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತಕ್ಕೆ ಉದ್ದಮತ್ತು ಅಗಲ ಎಂಬ ಎರಡೇ ಅಳತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ - ii) ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದು ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆ ಅಂದರೆ ಅಗಲವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡರೆ ಆಗ ಸರಳರೇಖೆ ಮಾತ್ರವೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ(ಚಿತ್ರ -iii) ಇನ್ನೊಂದು ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡರೆ ಕೊನಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಅಳತೆಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ(ಚಿತ್ರ -iv) ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ನಾವು ಒಂದು ಮೇಜು ಅಥವಾ ಪುಸ್ತಕದ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ರೇಖೆಗಳಾಗಿ ಹೋಲಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಅಂತ್ಯ ಅಥವಾ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಬಿಂದು ಎಂದು ಹೇಳುವರು.



ಘನಗಳು	→	ಮೇಲ್ಮೈ/ವಕ್ರಗಳು	→	ರೇಖೆಗಳು	→	ಬಿಂದುಗಳು
3-D		2-D		1-D		ಆಯಾಮ(ಅಳತೆ)ಇಲ್ಲ

ಇವು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲ ಪದಗಳು. ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಇತರ ಪದಗಳಾದ ರೇಖಾಖಂಡ, ಕೋನ , ತ್ರಿಭುಜದಂತಹವುಗಳನ್ನು ವಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿನ 1ನೇ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಯುಕ್ಲಿಡ್‌ನು 23 ವಾಖ್ಯೆನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾನೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಲವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ 300 B.C
ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪಿತಾಮಹ

- ಬಿಂದು ಎಂದರೆ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಭಾಗಗಳಿಲ್ಲದುದು.
- ರೇಖೆ ಎಂದರೆ ಅಗಲವಿಲ್ಲದ ಉದ್ದ.
- ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಅಂತ್ಯಗಳು ಬಿಂದುಗಳು .
- ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಮನಾಗಿ ಹೊಂದಿದ ರೇಖೆ.
- ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದರೆ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಹೊಂದಿರುವುದು.
- ಸಮತಲದ ಅಂಚುಗಳು ರೇಖೆಗಳು.
- ಒಂದು ಸಮತಲ ಎಂದರೆ ತನ್ನ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು.

ಬಿಂದು, ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸಮತಲಗಳಂಥ ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಸ್ಪಷ್ಟತೆಗಳಿಗೋಸ್ಕರ ಮತ್ತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕವಿರುವ ಅಥವಾ ವಿವರಣೆ ನೀಡಬೇಕಾದ ಅಥವಾ ಜಾಣ್ನುಡಿಗಳು ಅಂದರೆ ಭಾಗ, ಅಗಲ, ಸಮಾನವಾದ ಇಂಥವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದಾನೆ. ಭಾಗ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವಾಗ ಭಾಗ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಸ್ಪಷ್ಟತೆ ನೀಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳ ಸರಪಳಿಯನ್ನು ಅಂತ್ಯವಿಲ್ಲದಂತೆ ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಹ ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ ಅಂಶಗಳು ಎಂದು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬೇಕೆಂದು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಪಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಏನೇ ಆದರೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾದ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಲ್ಪನೆಯಿದೆ. ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಕೂಡ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಾಚೀನ ಚೀನಾದ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ ಮೋಜಿ(ಮೋಹಿ)ಯು ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಭಾಗವನ್ನು ಬಿಂದು ಎಂದಿದ್ದಾರೆ. ಮೇಲಿನ 2ನೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವೂ ಕೂಡ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನೊಳಗೊಂಡಿದೆ. ಆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳೆರಡೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಮಿತವಾದ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ ಅಂಶಗಳು ಪದಗಳೆಂದು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ನಾವು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ

'ಬಿಂದು' , 'ರೇಖೆ' ಮತ್ತು 'ಸಮತಲ' (ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೈ)ಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ ಅಂಶಗಳಾಗಿ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮಾತ್ರವೇ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ ಮಾದರಿಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ವಿವರಿಸಬಲ್ಲೆವು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ರುಜುವಾತುಪಡಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ಸ್ವಯಂ ನಿರ್ದಶಿತ ಸತ್ಯಗಳಾಗಿವೆ. ಆತ ಅವುಗಳನ್ನು ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳು ಹಾಗೂ ಆದಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಎನ್ನುವರು.

3.3.1 ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳು(ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯ) ಹಾಗೂ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ / ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು (Axioms and postulates)

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಶಿತ ಗಣಿತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರವಾಗಿ ಸ್ವಯಂ ನಿರ್ದಶಿತ ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದವೆನ್ನುವರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 'ಪೂರ್ಣ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ' ಯಾವಾಗಲೂ ದೊಡ್ಡದೇ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಇದು ಸ್ವಯಂ ನಿರ್ದಶಿತ ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲ. ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯ 'ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ' ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ P ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು Cಅಂಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಆಗ C ಯನ್ನು P ಅಂಶ ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದು R ಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸಂಕೇತ ರೂಪದಲ್ಲಿ $C > P$ ಆದಾಗ $C = P + R$ ಆಗುವಂತೆ R ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳು (ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯ)ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಸಂಪೂರ್ಣ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆದರೆ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ/ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದ ಗಳೆಂಬ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದೆ. ಈ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದ ಗಳು ವಿವಿಧ ಸಂಧರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಎದುರಾಗುತ್ತವೆ.(ಪ್ರಸ್ತುತ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು, ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ/ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಾಗಿಯೇ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕೆಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

- ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಬರುವ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವೇ
- ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸಮ

- ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳ ದ್ವಿಗುಣವೂ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಅರ್ಧಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು ಕೆಲವು ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಮೊದಲ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಸಮತಲ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ A ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ B ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ, B ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಒಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, Aನವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ.

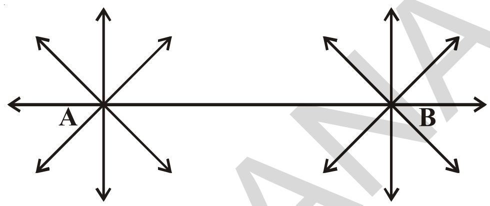
ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬಹುದು, ಕೂಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲಾರೆವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಲಾರೆವು. ಅಥವಾ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಲಾರೆವು.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತಿಳಿಸಿದ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಐದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ :

1. A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. A ಮತ್ತು B ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು? ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ಎಳೆಯಲಾರೆವು.



ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮೊದಲ ಸೂತ್ರವೂ ಮೇಲಿನ ಅಂಶವನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಅದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿದೆ.

ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ -1 : ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಳೆಯಬಹುದು.
ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ " ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸರಳರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ. "

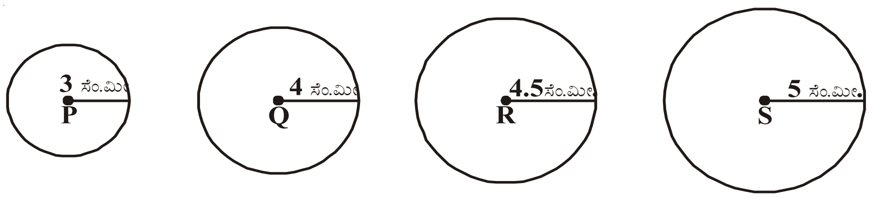
2. ಒಂದು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ರೇಖಾಖಂಡ PQ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. Pನಿಂದ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ, Q ನಿಂದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಅನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿರಿ.

ರೇಖಾಖಂಡ PQ ನ್ನು ಎರಡೂಕಡೆ ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು? ಇದಕ್ಕೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆಯಾ? PQ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗಾದರೂ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು. ಮತ್ತು PQ ರೇಖೆಗೆ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಲ್ಲದಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.
ಈ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ತನ್ನ ಎರಡನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ-2 : ಯಾವುದೇ ಸರಳ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ "ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು."

3. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 3 ಸೆಂ.ಮೀ, 4 ಸೆಂ.ಮೀ, 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕೈವಾರದ ಸಹಾಯದಿಂದ P, Q, R ಮತ್ತು S ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



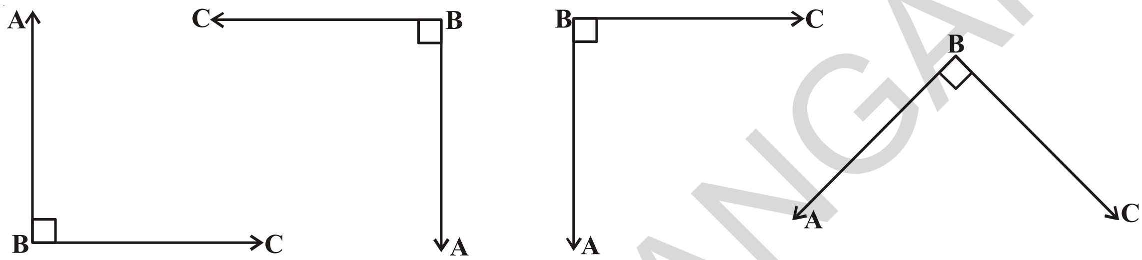
ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆ? ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಯಾವ ಕೇಂದ್ರದಿಂದಲಾದರೂ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದಲಾದರೂ ನಾವು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮೂರನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮೇಲಿನ ವಿಷಯವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ ದೂರಗಳಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ -3 : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

4. ಒಂದು ಚೌಕಗಳಿಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಲಂಬಕೋನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಕೋನ ಬಾಹುಗಳೊಂದಿಗೆ ಕತ್ತರಿಸಿ, ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಡಿ. ನೀವೇನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ?

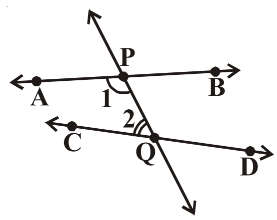


ನೀವು ಲಂಬಕೋನದ ಕೋನಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಲಂಬಕೋನ ಕೋನ ಬಾಹುಗಳೊಂದಿಗೆಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ನಾಲ್ಕನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ. ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನ ಹಾಗೂ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಆಧಾರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ - 4 : ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈಗ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 5ನೇ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

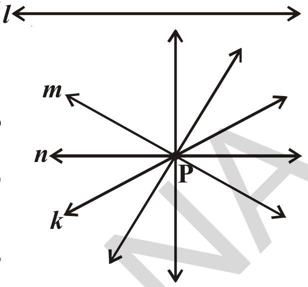
ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ - 5 : ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಎರಡು ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಸರಳರಖೆಗಳನ್ನು ಅದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅವು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.



ಗಮನಿಸಿ : PQ ಎಂಬರೇಖೆ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ತನ್ನ ಎಡಭಾಗದ ಕಡೆ ಇರುವ $\angle 1$ಮತ್ತು $\angle 2$ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ180° (ಲಂಬಕೋನ)ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಹಾಗೆ ಛೇಧಿಸುತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ PQ ಗೆ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುವುವು.

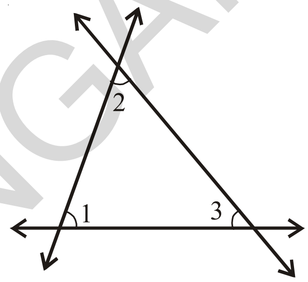
ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ಸೇರಿದಂತೆ ಅನೇಕ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಸಹ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತವಾಗಿ ಭಾವಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಹತ್ವ ಪಡೆದಿದೆ.ಇದರ ಕಾರ್ಯವಾಗಿ ಎರಡುಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳವರೆಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಉಳಿದ ಒಂಬತ್ತು ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಫಲಿತಾಂಶ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರು.ಇದರ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿ ಇತರ ಮೌಖಿಕ ಭಾವನೆಗಳ(ಪ್ಲೇ ಫೇಯಿರ್ ಸಿದ್ಧಾಂತ)ಆಧಾರವಾಗಿ ಸಾಧನೆಗೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರು.

3.3.2 5ನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಅಥವಾ 5ನೇ ಹೇಳಿಕೆಯ ಸಮಾನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು :



ನಂತರದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೊಳ್ಳುವಂತಹ ಪರ್ಯಾಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳು,

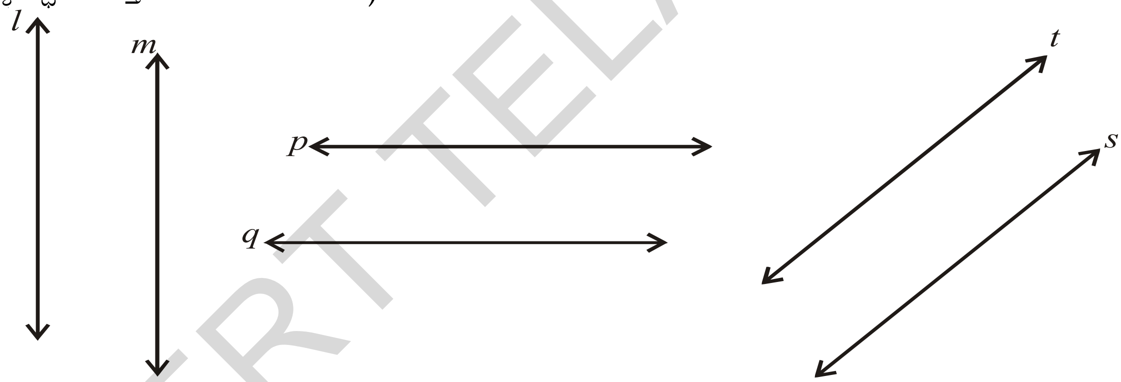
- ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಆದರ ಹೊರಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು 'l' ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು 'p' ಎಂಬ 'l'ಹೊರಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆದ್ದರಿಂದ 'l' ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ 'p'ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಪ್ಲೇ ಫೆಯರ್ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಎನ್ನುವರು (ಜಾನ್ ಪ್ಲೇ ಫೇಯರ್ 1748-1819)



- ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮ (ಲೆಜೆಂಡರ್)

ಅಂದರೆ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

- ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಸಮಾನವಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಎಲ್ಲಾಕಡೆ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತವೆ.(ಪೊಸಿಡೋಮಿನಸ್) (Posidominus)



- ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಸರಳರೇಖೆ ಛೇಧಿಸಿದರೆ, ಅದು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಸಹ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆ.(Proclus)
- ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವು ಒಂದುಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 5 ನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಮತ್ತೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನೇ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಐದು ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ ನಂತರ ಅವುಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ ಸಾಧಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಈ ರೀತಿ ಸಾಬೀತು ಆದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಉಕ್ತಿ ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯಗಳೆನ್ನುವರು.(ಉಕ್ತಿ ಎಂದರೆ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ)

ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲನೆ ಹಾಗೂ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೂಲಕ ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಊಹಾತ್ಮಕವಾಗಿ ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಸತ್ಯವೆಂದಾಗಲಿ, ಅಸತ್ಯವೆಂದಾಗಲಿ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಡುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ ಳೆನ್ನುವರು. ಗಣಿತ ಆವಿಷ್ಕಾರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತವೆ.

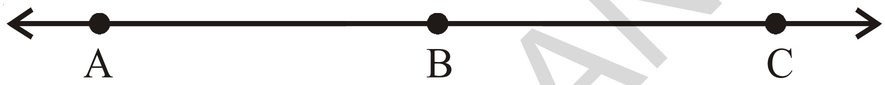
ಗೋಲ್ಡ್‌ಬ್ಯಾಕ್ (Gold Bach) ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ : 4 ಇಲ್ಲವೇ ಆದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಪ್ರತಿ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಗೋಲ್ಡ್‌ಬ್ಯಾಕ್ ತಿಳಿಸಿದನು.

ಸತ್ಯವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕ ಹಂತಗಳ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. 'ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧನೆ' ಎಂಬುದು ಪ್ರಮೇಯದ ಸತ್ಯಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಸಂದೇಹಾತೀತವಾಗಿ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಉಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ .

ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ ಅಂಶಗಳು, ಸ್ವೀಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಈಗಾಗಲೇ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಸುಮಾರು 465 ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಿ ರೂಪಿಸಿದನು.

ಫಲಿತಾಂಶ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸ್ವೀಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ-1 : A,B ಮತ್ತು C ಗಳು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು B ಬಿಂದುವು A ಮತ್ತು C ಗಳ ಮಧ್ಯೆಯಿರುವಾಗ AC - AB = BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AC ಮತ್ತು AB+BC ಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 4ನೇ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧದ ಮೂಲಕ "ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವವು ಸಮಾನಗಳು" ಆದ್ದರಿಂದ AB + BC = AC ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

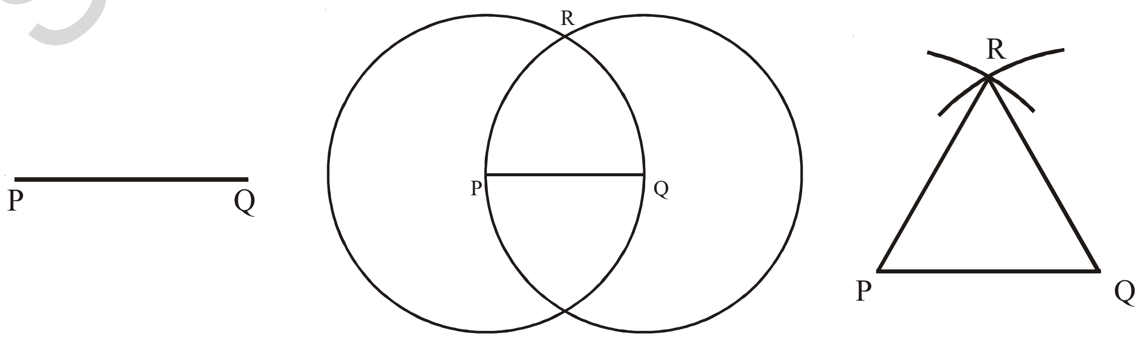
ಇದನ್ನು AC ಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ AC - AB = BC

$\cancel{AB} + BC - \cancel{AB} = BC$

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ -2 : ನೀಡಿದ ಯಾವುದೇ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆಯಾದರೂ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸ ಬಹುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಯಾವುದೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ PQ ನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.



ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮೂರನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ ನೀಡಿದ "ಕೇಂದ್ರ , ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು "ರಚಿಸಬಲ್ಲೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ P ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ಮತ್ತು PQ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ Q ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ QP ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಈ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು R ಬಳಿ ಛೇಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. 'R' ನ್ನು P ಮತ್ತು Q ನ್ನು R ಗೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ Δ PQR. ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ PQ = QR = RP ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

PQ = PR (P ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ). ಅದೇರೀತಿ PQ = QR (Q ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಂದ ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ PQ = QR = RP, ಆದ್ದರಿಂದ ΔPQR ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸದೇ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ವಿನಿಯೋಗಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ .

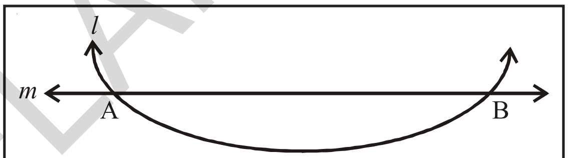
ಉದಾಹರಣೆ –3 : ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ದತ್ತ : ದತ್ತರೇಖೆಗಳು l ಮತ್ತು m ಗಳು ಎರಡು ದತ್ತರೇಖೆಗಳು.

ಸಾಧನೀಯ(RTP) : l ಮತ್ತು m ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ.

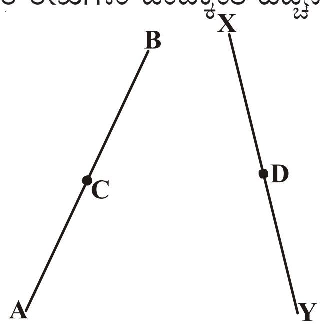
ಸಾಧನೆ : ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತವೆಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈಗ ನಮಗೆ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.



ಈ ಗುಣ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವೇ, ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅಲ್ಲವೆಂದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಪ್ರತಿಪಾದನೆ. ರೇಖೆ ಎಂದು ಬರೆದ ಪ್ರತಿ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಇದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ "ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಇರುತ್ತದೆ"ಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿರುದ್ಧತೆಯು " ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳು ಇವೆ " ರಚನೆಯು ನಮ್ಮ ಕಲ್ಪನೆಯಿಂದ ಬಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.



ಉದಾಹರಣೆ –4 : ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AC = XD, C ಮತ್ತು D ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು XY ಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು. ಹಾಗದರೆ AB = XY ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತಾಂಶ A B = 2 AC (AB ಮಧ್ಯಬಿಂದು C)

XY = 2 XD (XY ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D)

ಮತ್ತು AC = XD (ದತ್ತ)

$\therefore$ AB = XY

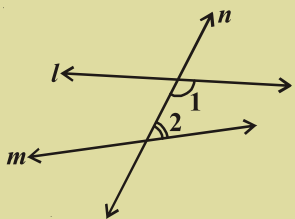
ಏಕೆಂದರೆ " ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳ ದ್ವಿಗುಣವೂ ಸಹ ಸಮಾನವೇ " – ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 'ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯ '.

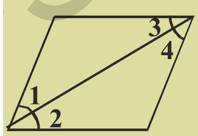
ಅಭ್ಯಾಸ - 3.1

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :
   i. ಘನಾಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಆಳತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ?
   ii. " ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ "ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪುಸ್ತಕಗಳಿವೆ?
   iii. ಘನ ಮತ್ತು ಆಯತಘನದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಮತಲಗಳಿವೆ?
   iv. ತ್ರಿಭುಜದ ಆಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?
   v. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿನ ಮೂರು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ ಅಲ್ಲವೊ ತಿಳಿಸಿ. ಕಾರಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ :
   a) ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಇರುತ್ತದೆ.
   b) ಎಲ್ಲ ಲಂಬಕೋನಗಳೂ ಸಮ.
   c) ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ವೃತ್ತಗಳು ಸಮ.
   d) ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎರಡೂಕಡೆ ನಿರಂತರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

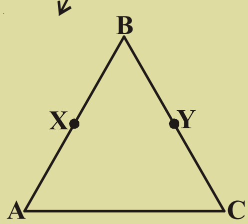
   e) ಚಿತ್ರದಿಂದ , AB > AC
3. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AH > AB + BC + CD ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

4. Q ಬಿಂದುವು P ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ PQ = QR ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ $PQ = \frac{1}{2}$ PR ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.
5. 5.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
6. ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ ಎಂದರೇನು? ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.
7. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. P ಮತ್ತು Q ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. PQ ರೇಖೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಬಲ್ಲೆವು?
8. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು l ಮತ್ತು m ಗಳ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆ n ಇದೆ. ಅಂತರ್ 'ಕೋನಗಳಾದ $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 2$ ರ ಮೊತ್ತ 180° ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ l ಮತ್ತು m ರೇಖೆಗಳ ಕುರಿತು ನೀನೇನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?





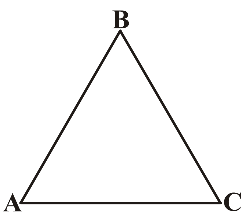
9. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 3 = \angle 4$ ಆದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 2$ ರ ಮಧ್ಯೆಯಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



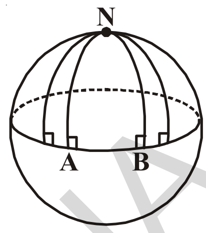
10. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $BX = \frac{1}{2}$ AB, $BY = \frac{1}{2}$ BC ಮತ್ತು AB = BC ಆದರೆ BX = BY ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ನೇತರ ಜ್ಯಾಮಿತಿ :

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿನ 5ನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಫಲ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ಕಾರ್ಲ್ ಫೆಡ್ರಿಕ್ ಗಾಸ್, ಲೊಬಾಚೆವಸ್ಕಿ ಮತ್ತು ಬೋಲ್ಯಾಯ್‌ವಂತಹ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಹೊಸ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಕೆರಳಿಸಿದವು. ಅವರು 5ನೇ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಸತ್ಯ ಇಲ್ಲವೇ ಅದನ್ನು ವ್ಯತಿರೇಖ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು 5 ನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಆದೇಶಿಸಬಹುದೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರು. 5 ನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಅವು ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ನೇತರ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.



(i)



(ii)

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೈ , ಸಮತಲವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ?

ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಮೇಲೆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ . ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೂ, ಚೆಂಡಿನ ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು? ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಭುಜದ ಗೆರೆಗಳು ನೇರವಾಗಿವೆ ಚೆಂಡಿನ ಮೇಲಿನ ಗೆರೆಗಳು ನೇರವಾಗಿಲ್ಲ.

(ii)ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ AN ಮತ್ತು BN ರೇಖೆಗಳು, ಒಂದೇ ರೇಖೆ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಆ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. (ಆದರೆ $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$) ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೇ ಗೋಳದ ಮೇಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ NAB ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು(ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A + \angle B = 180^\circ$) ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೈ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿಲ್ಲದ ಗೋಳವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಗೋಳೀಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಎನ್ನುವರು (spherical geometry) . ಅದೇ ರೀತಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಮತಲ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತವೆ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

- ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ ಪದಗಳಾದ ಬಿಂದು, ರೇಖೆ ಸಮತಲಗಳನ್ನು ರೇಖಾ ಗಣಿತದ ಅಡಿಪಾಯ ವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.
- ಬಿಂದು, ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸಮತಲದಂತಹ ಅವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಅನೇಕ ಗಣಿತಜ್ಞರು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದಾರೆ.
- ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ ಗ್ರಂಥ"ದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಸ ಆಲೋಚನಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಿದನು. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ನಂತರದ ಗಣಿತದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಬುನಾದಿಯಾಯಿತು.
- ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಜ್ಞೆಗಳು
  - ಒಂದು ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
  - ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಬರುವ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮ.

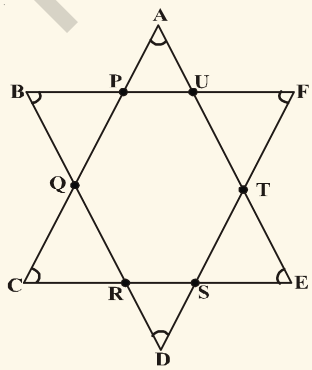
- ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸಮ
- ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಒಂದು ಪೂರ್ಣವು ಅದರ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದು.
- ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳ ದ್ವಿಗುಣವೂ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಸಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಅರ್ಧಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

- ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು / ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು

1. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಳೆಯಬಹುದು
2. ಯಾವುದೇ ಸರಳ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು..
3. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.
4. ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
5. ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಒಂದು ಪಾರ್ಶದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದೇ ಪಾರ್ಶದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ವೃದ್ದಿಸಿದಾಗ ಅವು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಮೆದುಳಿಗೆ ಮೇವು

1. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle$ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು? ನಿನ್ನ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ತಿಳಿಸು.

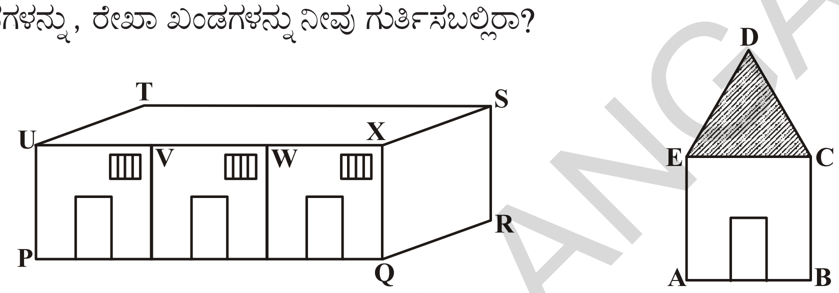


2. ಒಂದು ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ‘a’ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಾದರೆ ಆದರ ಎರಡರಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

04 ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು

4.1 ಪರಿಚಯ

ರೇಷ್ಮ ತನ್ನ ಶಾಲೆಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ,ಗೋಪಿ ತನ್ನ ಮನೆಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಎಳೆದಿದ್ದಾರೆ. ಈ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕೋನಗಳನ್ನು , ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳನ್ನು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?



(i) (ii)

ಮೇಲಿನ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ (PQ, RS, ST, ...) ಮತ್ತು (AB, BC, CD, ...) ಮುಂತಾದವು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಇದೇ ರೀತಿ $\angle QPU$, $\angle RQP$, ... ಮತ್ತು $\angle BAE$, $\angle CBA$, ... ಮುಂತಾದವು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

ಒಬ್ಬ ವಾಸ್ತು ಶಿಲ್ಪಿ(ಆರ್ಕಿಟೆಕ್) ಮನೆಗಳು, ಸೇತುವೆಗಳು, ಗೋಪುರಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳಿಗೆ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು, ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು , ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳಿಂದ ಎಳೆಯುತ್ತಾನೆ.

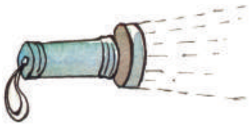
ಕಾಂತಿ ಚಲನೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಿ ಫಲಿತವಾಗಿ ಉಂಟಾಗುವ ಪ್ರತಿಫಲನ, ವಕ್ರೀಭವನ ಮತ್ತು ಚದುರುವಿಕೆಗಳ ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ವಿವಿಧ ಬಲಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ಕೆಲಸ ನಡೆದಿದೆಯೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಬಲಕ್ಕೆ, ದೂರಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯ ಇರುವ ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಗಣನಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಎತ್ತರವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ನಮಗೆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು ಎರಡೂ ಬೇಕಾಗುವವು. ಹೀಗೆ ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಹಲವು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

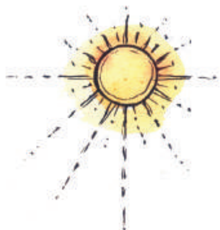
ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ

ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಮುತ್ತ ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಅವುಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಇಂತಹ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿರಿ.

4.2 ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಮೂಲ ಪರಿಂಕಲ್ಪನೆಗಳು





ಸೂರ್ಯನಿಂದ ಅಥವಾ ಟಾರ್ಚ್‌ನಿಂದ ಹೊಮ್ಮುವ ಕಾಂತಿ ಪುಂಜವನ್ನು ಕುರಿತು ಆಲೋಚಿಸಿ, ಈ ಕಾಂತಿ ಪುಂಜವನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ? ಇದು ಸೂರ್ಯನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ "ಒಂದು ಕಿರಣ ಎಂಬುದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿನ ಭಾಗ, ಇದು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅನಂತವಾಗಿ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತದೆ "ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಸರಳರೇಖೆಯು ಎರಡೂ ಕಡೆ ಅನಂತವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಭಾಗವನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡ ಎನ್ನುವರು .

ಸಾಧರಣವಾಗಿ ರೇಖಾ ಖಂಡ AB ನ್ನು $\overline{AB}$ ಯಾಗಿ ಮತ್ತು ಈ ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಉದ್ದವನ್ನು AB ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕಿರಣ AB ನ್ನು $\overrightarrow{AB}$ ಎಂದು ಸರಳರೇಖೆ AB ಯನ್ನು ಎಂದು $\overleftrightarrow{AB}$ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ . ಆದರೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನು $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ ಎಂದು ಅಥವಾ ಕೆವು ಬಾರಿ l, m, n ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಮೂರು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಏಕರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು, ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

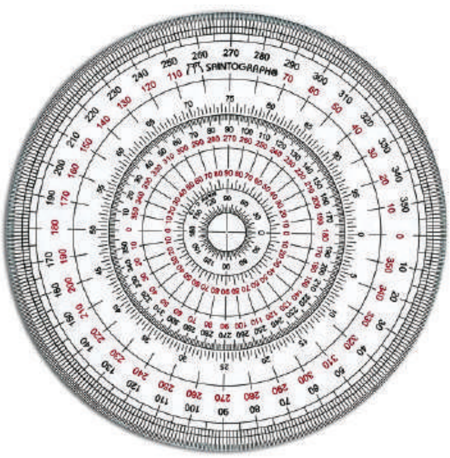
ಶೇಖರ್ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ. (**ಗಮನಿಸಿ :** $\overline{PQ}$ ಮತ್ತು $\overline{QP}$ ಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವವು)

ಕ್ರ.ಸಂ	ಸರಳರೇಖೆ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು	ರೇಖಾಖಂಡಗಳು	ಸಂಖ್ಯೆ
1.	P R Q	PQ, PR, RQ	3
2.	P S R Q	PQ, PR, PS, SR, SQ, RQ	6
3.	P S T R Q	....	

ಸರಳ ರೇಖೆ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ , ಉಂಟಾದ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಏನಾದರೂ ಕ್ರಮಾನುಗತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿರುವಿರಾ?

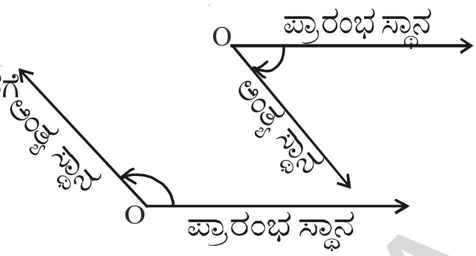
ಸರಳ ರೇಖೆ ಮೇಳೆ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಈ ಅನುಕ್ರಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಸರಳ ರೇಖೆ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	4	5	6	7
ಒಟ್ಟು ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	3	6	.....	.....	.....



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು 360 ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ.

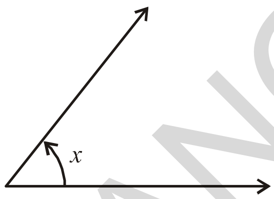
ಪ್ರತಿ ಭಾಗದ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿ .



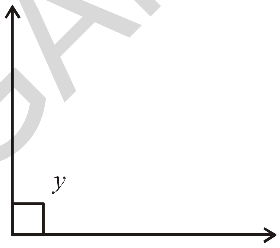
ಒಂದು ಕಿರಣವು ಪ್ರಾರಂಭ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಅಂತ್ಯ ಸ್ಥಾನದವರೆಗೆ ಸುತ್ತುವದರಿಂದ ಕೋನವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು 'O' ಆಧಾರವಾಗಿ ಒಂದು ಕಿರಣ ಪ್ರಾರಂಭ ಸ್ಥಾನದಿಂದ, ಅಂತ್ಯಸ್ಥಾನದ ವರಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಭ್ರಮಣ ಎನ್ನುವರು. ಈ ಭ್ರಮಣದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕೋನಮಾಪಕ ಅಳೆದಾಗ ಬಂದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೋನ ಎನ್ನುವರು.

ಒಂದು ಪೂರ್ತಿ ಭ್ರಮಣದ ಬೆಲೆ 360^0. ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ನಾವು ಕೈವಾರದಿಂದ ಸಹ ರಚಿಸಬಹುದು.

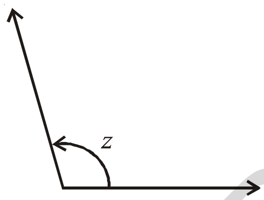


ಲಘು ಕೋನ : $0° < x < 90°$

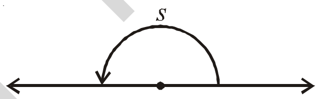


ಲಂಬಕೋನ : $y = 90°$

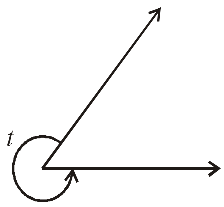
ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳು ಹೊಮ್ಮಿದಾಗ ಕೋನವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವ ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಕೋನಬಾಹುಗಳೆಂದು, ಆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಶೃಂಗಬಿಂದು ಅಥವಾ ಶೃಂಗ ಕೋನ ಎನ್ನುವರು. ನೀವು ಇದುವರೆಗೆ ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳು ಕುರಿತು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಅವು ಲಘು ಕೋನ, ಲಂಬಕೋನ, ಅಧಿಕಕೋನ, ಸರಳಕೋನ ಮತ್ತು ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನಗಳು .



ಅಧಿಕಕೋನ : $90° < z < 180°$

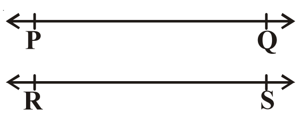


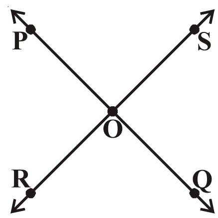
ಸರಳಕೋನ : $s = 180°$



ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನ : $180° < t < 360°$

4.2.1 ಛೇದಕ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳದ ರೇಖೆಗಳು

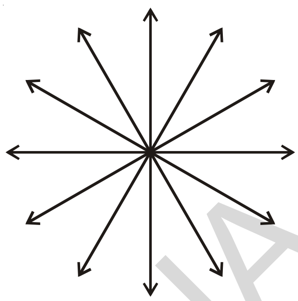




ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತಿದ್ದರೆ $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯಾ? (ಅವುಗಳ ಅನಂತವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದರೂ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆಯಾ?) ಇಂತಹ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯವರು? ಇದನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ಹಾಗಲ್ಲದೆ ಈ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಆವುಗಳನ್ನು ಛೇದಕ ರೇಖೆಗಳು ಎನ್ನುವರು.

4.2.2 ಏಕೀಭವನ ರೇಖೆಗಳು



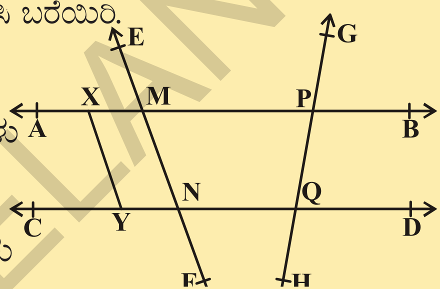
ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಎಷ್ಟು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ? ಅಂತಹ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಏನೆನ್ನುವರೋ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಮೂರು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಏಕೀಭವನ ರೇಖೆಗಳು ಎಂದು, ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಏಕೀಭವಿಸುವ ಬಿಂದು ಎಂದು ಎನ್ನುವರು.

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಛೇದನರೇಖೆಗಳಿಗೆ, ಏಕೀಭವನ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.1

1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.



(i) ಯಾವುದಾದರೂ ಆರು ಬಿಂದುಗಳು

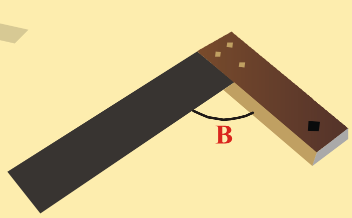
(ii) ಯಾವುದಾದರೂ ಐದು ರೇಖಾಖಂಡಗಳು

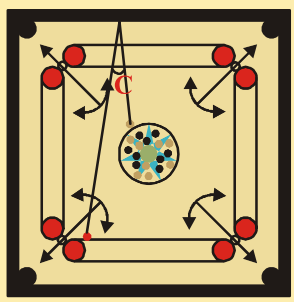
(iii) ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಕಿರಣಗಳು

(iv) ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಸರಳರೇಖೆಗಳು

(v) ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಏಕರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳು

2. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಯಾವ ಬಗೆಯವೋ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.





3. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ, ಅಸತ್ಯವೋ , ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) ಒಂದು ಕಿರಣಕ್ಕೆ ಅಂತ್ಯಬಿಂದು ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಸರಳ ರೇಖೆ $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆ $\overrightarrow{BA}$ ಗಳು ಒಂದೇ

(iii) ಕಿರಣ $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು ಕಿರಣ $\overrightarrow{BA}$ ಗಳು ಒಂದೇ.

(iv) ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಉದ್ದ ಇರುವುದು.

(v) ಒಂದು ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಮಂದ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(vi) ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುವುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲೆವು.

(vii) ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುವವು.

(viii) ಎರಡು ಛೇದಕ ರೇಖೆಗಳು, ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ವಾಗಲಾರವು.

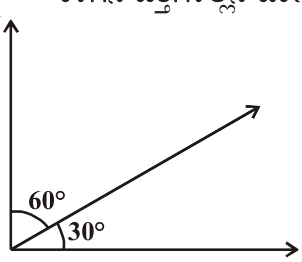
4. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆಕೊಟ್ಟ ಸಮಯ ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಆ ಎರಡು ಮುಳ್ಳುಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನ ಎಷ್ಟು?

(a) 9'O ಗಂಟೆಗಳು (b) 6'O ಗಂಟೆಗಳು (c)ಸಾಯಿಂಕಾಲ 7:00 ಗಂಟೆ

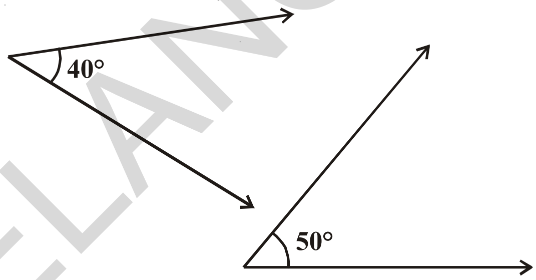
4.3 ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳು

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಕೋನಗಳ ಜೋತೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



(i)



(ii)

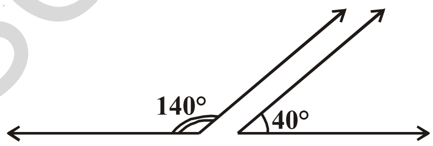
ಪ್ರತಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? ಅದು 90^0 ಅಲ್ಲವೇ! ಅಂತಹ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುವರೋ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೆ? ಅವುಗಳನ್ನು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವರು.

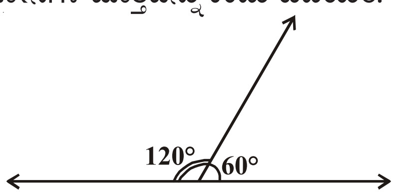
ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನ x^0 ಆದರೆ, ಅದರ ಪೂರಕ ಕೋನ ಎಷ್ಟು? x^0 ಕೋನದ ಪೂರಕ ಕೋನ $(90^0 - x^0)$.

ಉದಾಹರಣೆ –1: ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ $62°$, ಆದರೆ ಅದರ ಪೂರಕ ಕೋನದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಸಾಧನೆ : ಪೂರಕ ಕೋನದ ಮೊತ್ತ $90°$, ಆದ್ದರಿಂದ $62°$ ಕೋನದ ಪೂಕರ ಕೋನ $90° - 62° = 28°$

ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.





ಪ್ರತಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? 180^0 ಅಲ್ಲವೇ! ಇಂತಹ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುವರೋ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಇವನ್ನು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನ x^0, ಆದರೆ ಅದರ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನ ಎಷ್ಟು? x^0 ಕೋನದ ಪರಿಪೂರದ ಕೋನ $(180° - x^o)$.

ಉದಾಹರಣೆ -2. ಎರಡು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ಅನುಪಾತ 4 : 5 ಆದರೆ ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ಬೇಕಾದ ಕೋನಗಳು $4x$ ಮತ್ತು $5x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ $4x + 5x = 90^0$ (ಏಕೆ?)

$9x = 90^0 \Rightarrow x = 10^0$

ಬೇಕಾದ ಕೋನಗಳು 40^0 ಮತ್ತು 50^0.

ಈಗ (120°, 240°) (100°, 260°) (180°, 180°) (50°, 310°) ..... ಮುಂತಾದ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಇಂತಹ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ? ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆದರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಸಂಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವರು. *270°* ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಯುಗ್ಮ ಕೋನವನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ? $x°$ ಕೊನಕ್ಕೆ ಸಂಯುಗ್ಮ ಕೋನವು ಯಾವುದು?

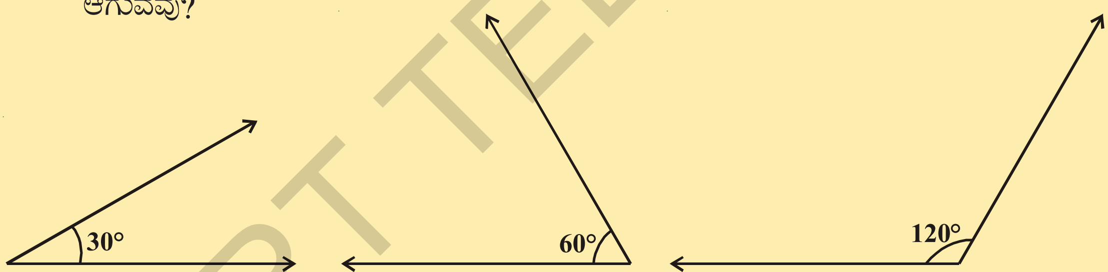
ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ.

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಪೂರಕ, ಪರಿಪೂರಕ, ಸಂಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (a) 45^0 (b) 75^0 (c) 215° (d) 30^0

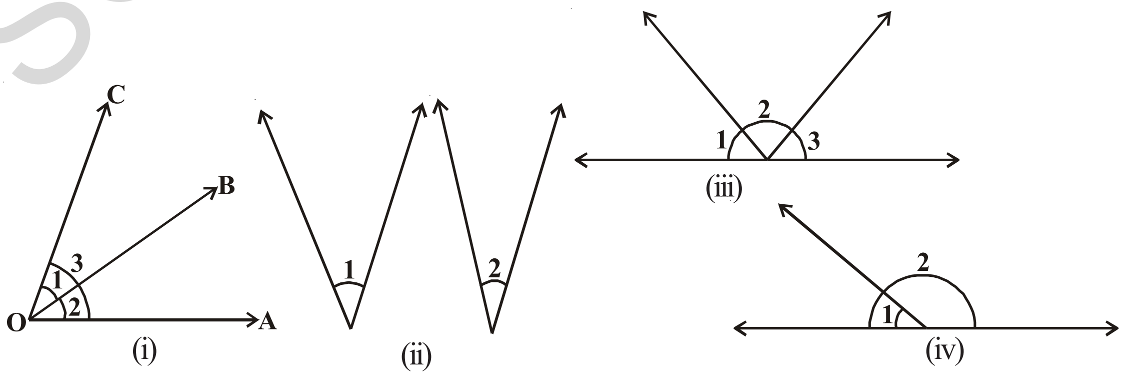
   (e) 60^0 (f) 90° (g) 180°

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕೋನಗಳು ಜೊತೆಗಳು ಪೂರಕ ಮತ್ತು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಆಗುವವು?



(i) (ii) (iii)

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಈ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇವೆಯೇ?



(i) ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 2$ ರ ಶೃಂಗಬಿಂದು 'O' ಶೃಂಗಬಾಹು '$\overrightarrow{OB}$' ಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳ ಕುರಿತು ನೀವು ಏನನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ? ಅವು ಹೇಗೆ ಹೊಂದಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ? ಆ ಬಾಹುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಹೊಂದಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಅಂತಹ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುವರು?

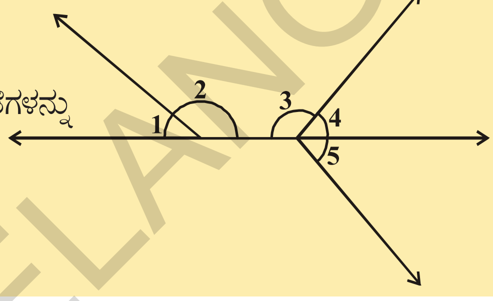
ಇವನ್ನು ಪಾಶ್ವ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

(ii) ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 2$ ಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗವಾಗಲಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವಾಗಲಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು ಅಲ್ಲ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

(i) ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ (i, ii, iii & iv) ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳಲ್ಲದ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಪಕ್ಕ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.



ಒಂದು ಕೋನಗಳ ಜೋತೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗಬಿಂದು, ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು, ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಇರುವ, ಆ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಎನ್ನುವರು.

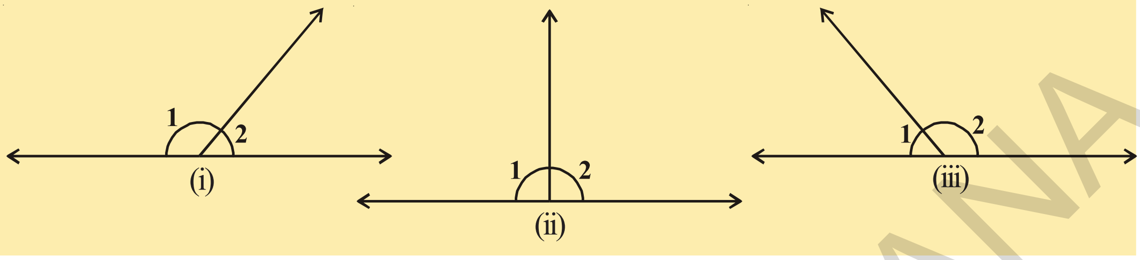
ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರನ ಕೈ ಜಾವೆಲಿಸ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಕೊನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಅವು ಎಂತಹ ಕೋನಗಳು ? ಅವು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟೋ ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಅವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಇಂತಹ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುವರು? ಅದನ್ನು ಸರಳಯುಗ್ಮ ಎನ್ನುವರು, ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆದರೆ ಅದನ್ನು ನಾವು ಸರಳಯುಗ್ಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :

ಸರಳಯುಗ್ಮವು ಯಾವಾಗಾಲು ಪಾಶ್ವಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಪಾಶ್ವ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಸರಳಯುಗ್ಮವಾಗುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆ?

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿರಿ.

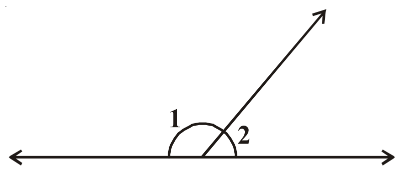


ಚಿತ್ರ	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 1 + \angle 2$
(i)			
(ii)			
(iii)			

4.3.1 ಸರಳಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು

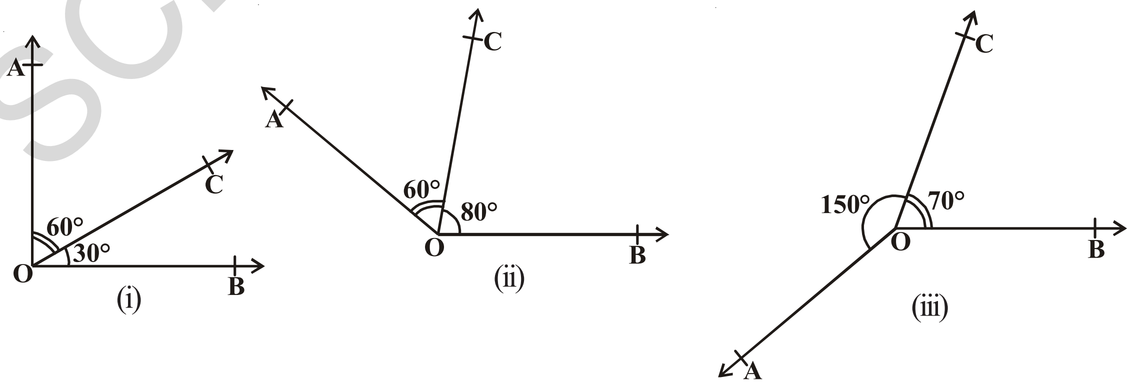
ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ : ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಪಾಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಇರುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆದರೆ ಅವನ್ನು ಸರಳಯುಗ್ಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

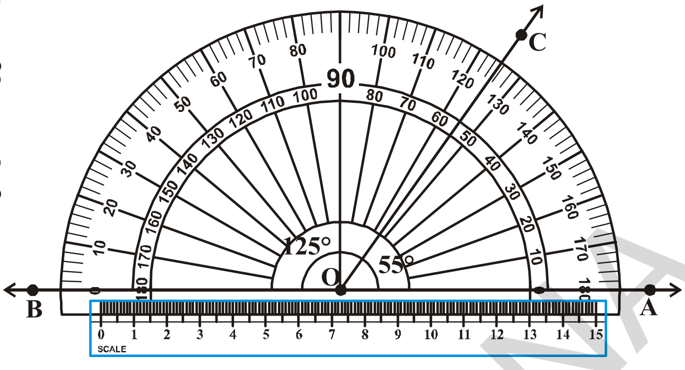


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಬಾಹುವಿನೊಂದಿಗೆ ಸ್ಕೇಲನ್ನು ಇಡಿ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದ ಆ ಎರಡನೇ ಬಾಹುವು ಸಹ ಸ್ಕೇಲಿನ ಅಂಚಿನೊಂದಿಗೆ ಇರುತ್ತದೆಯಾ?

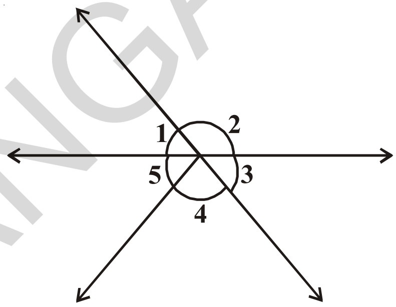


ಕೇವಲ (iv) ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸ್ಕೇಲಿನ ಅಂಚುಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಇನ್ನೂ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಿದಾಗ $\angle AOC + \angle COB = 55° + 125°° = 180°$. ಉಳಿದ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ.



(iv)

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ : ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°, ಆದರೆ ಆ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

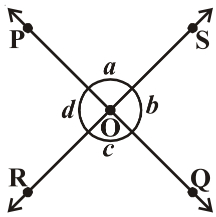


ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು : ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತ ಉಂಟಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ 360° ಇರುತ್ತದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^0$

4.3.2 ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು

ಎರಡು ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಎಷ್ಟು ಜೊತೆ ಸರಳ ಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳು ಏರ್ಪಟ್ಟಿವೆ.

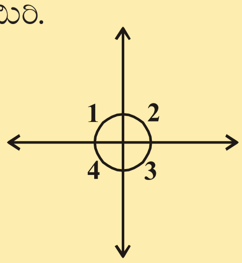


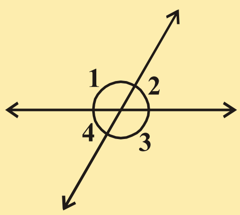
ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle POS$ ಮತ್ತು $\angle ROQ$ ಗಳು ಒಂದೇ ಶೃಂಗವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವಿಲ್ಲದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವನ್ನು ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವರು.

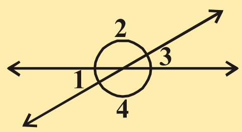
ಎಷ್ಟು ಜೊತೆಗಳ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಇವೆ? ಅವುಗಳನ್ನು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ? (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ)

ಚಟುವಟಿಕೆ :

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು 1, 2, 3, 4 ಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ಕೊಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.



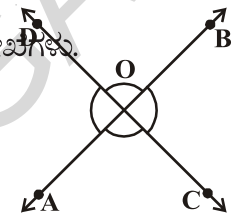




ಚಿತ್ರ	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
(i)				
(ii)				
(iii)				

ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಕುರಿತು ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವೆ ? ಅವು ಸಮವಾಗಿ ಇವೆಯಾ? ಪ್ರಮೇಯದ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ4.1 : ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಬಿಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ದತ್ತ: AB ಮತ್ತು CD ಗಳು O ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು.

ಸಾಧನೀಯ :

(i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle DOA = \angle COB$.

ಸಾಧನೆ :

ಕಿರಣ $\overrightarrow{OA}$ ಸರಳರೇಖೆ $\overleftrightarrow{CD}$ ಯ ಮೇಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AOC + \angle DOA = 180°$ [ಸರಳಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ] .... (1)

ಹಾಗೆಯೇ $\angle DOA + \angle BOD = 180°$ [ಏಕೆ?] .... (2)

$\angle AOC + \angle DOA = \angle DOA + \angle BOD$ [(1) ಮತ್ತು (2) ರ ರಿಂದ]

$\angle AOC = \angle BOD$ [ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆ ತೆಗೆದುಹಾಕಿದಾಗ]

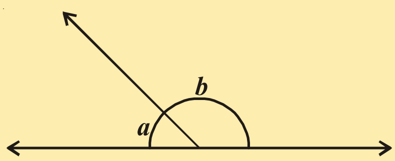
ಇದೇ ರೀತಿ ನಾವು

$\angle DOA = \angle COB$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

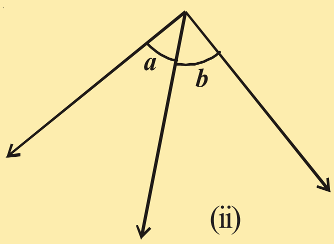
ಇದನ್ನು ನೀನು ಸ್ವಂತವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ :

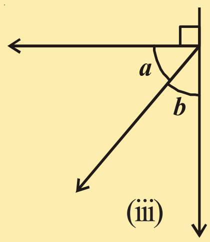
1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು, ಪೂರಕಕೋನಗಳು, ಸರಳಯಗ್ಮಗಳು, ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ.

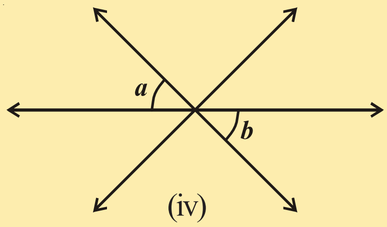


(i)

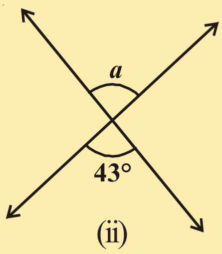


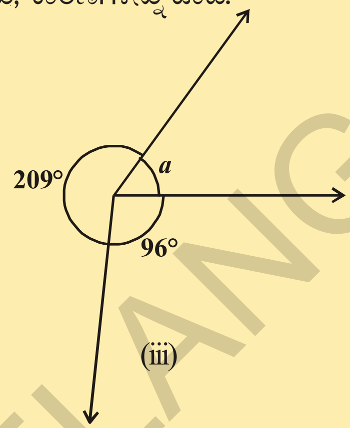
(ii)

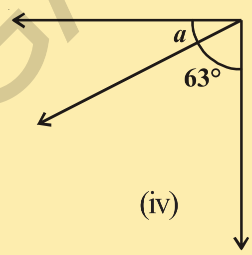


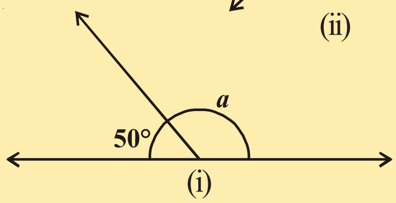


2. ಪ್ರತಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'a' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.



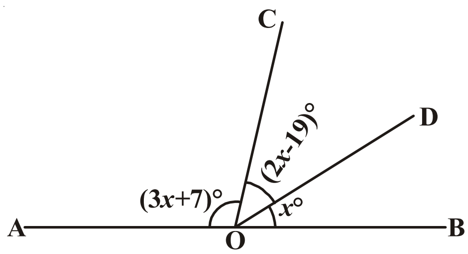






ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ -3: ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{AB}$ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಆದರೆ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ $\angle AOC$, $\angle COD$ ಮತ್ತು $\angle BOD$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : $\overleftrightarrow{AB}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಇದರಮೇಲೆ 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0.

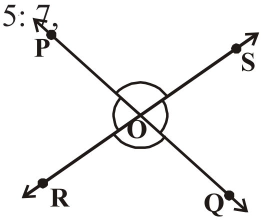
$\therefore (3x + 7)° + (2x - 19)° + x = 180°$ ($\therefore$ ಸರಳಕೋನ)

$\Rightarrow 6x - 12 = 180 \Rightarrow 6x = 192 \Rightarrow x = 32°$.

ಅದ್ದರಿಂದ, $\angle AOC = (3x + 7)° = (3 \times 32 + 7)° = 103°$,

$\angle COD = (2x - 19)° = (2 \times 32 - 19)° = 45°$, $\angle BOD = 32°$.

ಉದಾಹರಣೆ - 4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PQ ಮತ್ತು RS ಸರಳರೇಖೆಗಳು, O ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$, ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

ಆದರೆ $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (ದತ್ತ)

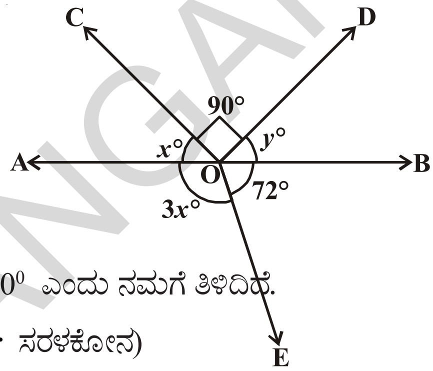
ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180 = 75^\circ$

ಇದೇರೀತಿ, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180 = 105^\circ$

ಈಗ, $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಉದಾಹರಣೆ -5 : ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AOB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. $\angle COD = 90^\circ$, $\angle BOE = 72^\circ$ ಆದರೆ $\angle AOC$, $\angle BOD$ ಮತ್ತು $\angle AOE$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : AOB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ, ಆದ್ದರಿಂದ :

$\angle AOE + \angle EOB = 180^\circ$

$= 3x^\circ + 72^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 3x^\circ = 108^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0 ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \angle COA + \angle DOC + \angle BOD = 180^0$ ($\because$ ಸರಳಕೋನ)

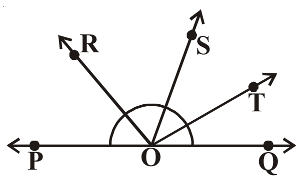
$\Rightarrow x^\circ + 90^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 36^\circ + 90^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$y^\circ = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$

$\therefore \angle COA = 36^\circ$, $\angle BOD = 54^\circ$ ಮತ್ತು $\angle AOE = 108^\circ$.

ಉದಾಹರಣೆ -6: ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಿರಣ OS ಸರಳರೇಖೆ PQ ಮೇಲಿದೆ. ಕಿರಣ OR ಮತ್ತು ಕಿರಣ OT ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle SOP$ ಮತ್ತು $\angle QOS$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು . ಆದರೆ $\angle TOR$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : ಕಿರಣ OS. ಸರಳರೇಖೆ PQ ನ ಮೇಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle SOP + \angle QOS = 180^\circ$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

$\angle SOP = x^\circ$ ಆಗಿರಲಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^\circ + \angle QOS = 180^\circ$ (ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ಆಲೋಚಿಸಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle QOS = 180^\circ - x^\circ$

$\angle SOP$ ಗೆ OR ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ.

$$\angle SOR = \frac{1}{2} \times \angle SOP$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\angle TOS = \frac{1}{2} \times \angle QOS$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

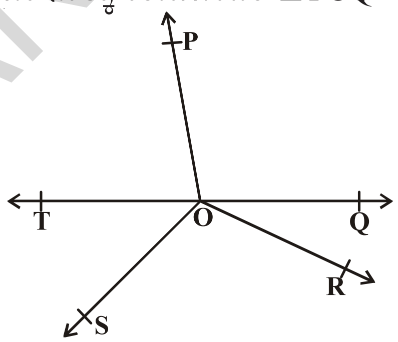
$= 90° - \frac{x°}{2}$

ಈಗ, $\angle TOR = \angle SOR + \angle TOS$

$= \frac{x°}{2} + \left(90° - \frac{x°}{2}\right)$

$= 90°$

ಉದಾಹರಣೆ-7: ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OS}$ ಗಳು ನಾಲ್ಕು ಕಿರಣಗಳಾದರೆ $\angle POQ + \angle ROQ + \angle ROS + \angle SOP = 360°$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಸಾಧನೆ : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ ಅಥವಾ $\overrightarrow{OS}$ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕಿರಣಕ್ಕೆ ವ್ಯತಿರೇಖ ಕಿರಣ ಳೆಯಿರಿ.

$\overleftrightarrow{TOQ}$ ಸರಳರೇಖೆ ಆಗುವಂತೆ ಕಿರಣ $\overrightarrow{OT}$ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಕಿರಣ OP ಸರಳರೇಖೆ $\overleftrightarrow{TQ}$ ಮೇಲಿರುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ .... (1) (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

ಇದೇ ರೀತಿ $\overrightarrow{OS}$ ಸರಳರೇಖೆ $\overleftrightarrow{TQ}$ ಮೇಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ .... (2) (ಏಕೆ?)

ಆದರೆ $\angle SOQ = \angle SOR + \angle ROQ$

ಸಮೀಕರಣ (2) ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\angle TOS + \angle SOR + \angle ROQ = 180°$ .... (3)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (3) ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ

$\angle POT + \angle QOP + \angle TOS + \angle SOR + \angle ROQ = 360°$ .... (4)

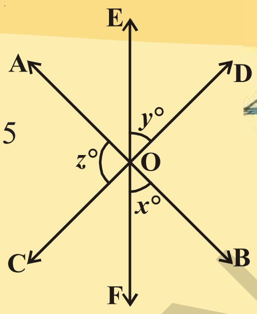
ಆದರೆ $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (4) ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿಧವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು.

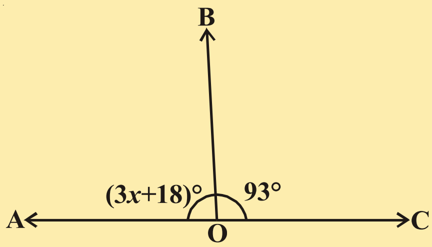
$\angle QOP + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.2

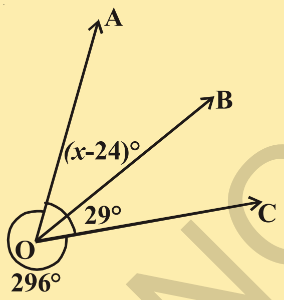
1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{EF}$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು 'O' ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವವು. $x : y : z = 2 : 3 : 5$ ಆದರೆ x, y ಮತ್ತು z ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



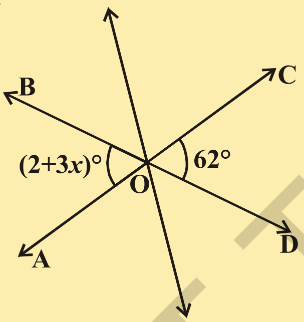
2. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



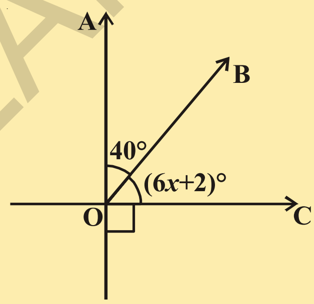
(i)



(ii)

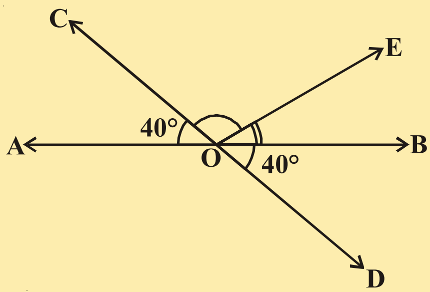


(iii)

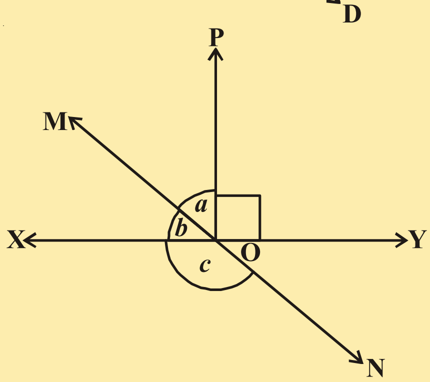


(iv)

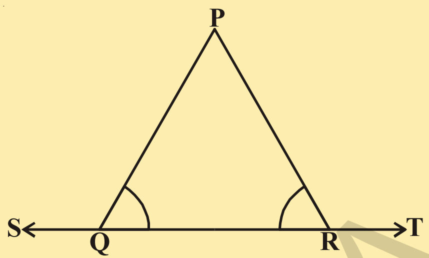
3. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವವು. $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ ಮತ್ತು $\angle DOB = 40°$, ಆದರೆ $\angle BOE$ ಮತ್ತು ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನ $\angle EOC$ ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



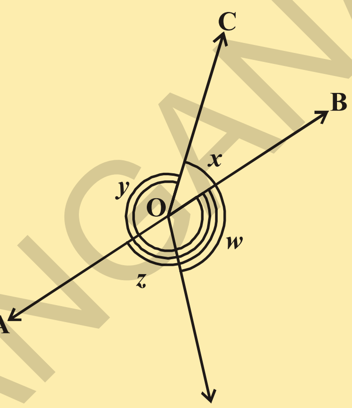
4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $\overleftrightarrow{XY}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{MN}$ ಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವವು. $\angle YOP = 90°$, $a : b = 2 : 3$, ಆದರೆ 'c' ಕೋನದ ಬೆಲೆಯನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



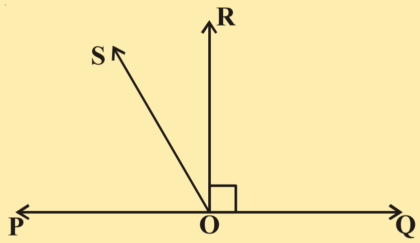
5. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle RQP = \angle PRQ$, ಆದರೆ $\angle PQS = \angle TRP$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.



6. ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $x + y = w + z$, ಆದರೆ AOB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.



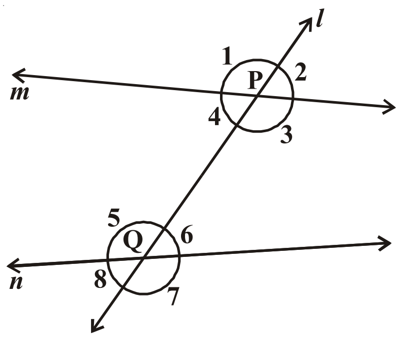
7. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{PQ}$ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಕಿರಣ $\overrightarrow{OR}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. $\overrightarrow{OS}$ ಎಂಬುದು $\overrightarrow{OP}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OR}$ ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಬೇರೆಂದು ಕಿರಣವಾದರೆ $\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle SOP)$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.



8. $\angle XYZ = 64°$, XY ನ್ನು ಬಿಂದು P ವರೆಗೆ ವೃದಿಸಲಾಗಿದೆ. $\angle ZYP$ ನ್ನು ಕಿರಣ YQ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿ. ಅದೇ ರೀತಿ $\angle XYQ$ ಮತ್ತು ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನ $\angle QYP$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4.4 ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಛೇದಕ ರೇಖೆ.

ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಸರಳರೇಖೆ *'l'* ಉಳಿದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು m ಮತ್ತು n ಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆ? ಸರಳರೇಖೆ *'l'* ಉಳಿದ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ? ಇವನ್ನೇ ನಾವು ಛೇದಕರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು *'l'* ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಕರೇಖೆ ಎನ್ನುವರು. ಸರಳರೇಖೆ *'l'* ಉಳಿದ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದ 'm' ಮತ್ತು 'n'ನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 'P' ಮತ್ತು 'Q' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆ *'l'* ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದ m ಮತ್ತು n ಗಳಿಗೆ ಛೇದಕರೇಖೆ



ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ ಛೇಧಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ

ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ 8 ಕೋನಗಳೇರ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $\angle 1, \angle 2. . . \angle 8$ ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು ನಾವು ವರ್ಗೀಕರಿಸ ಬಲ್ಲೆವೇ? ಈ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಅಂತರ ಕೋನಗಳು $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳು, ಅದೇರೀತಿ $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ ಅಂತರ ಕೋನಗಳು.

ಛೇದರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಕಡೆ ಇದ್ದು, ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳಲ್ಲದ ಒಂದು ಅಂತರ್ಯ, ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ

(a) ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳಾವುವು?

(i) $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 7$,ಆದ್ದರಿಂದ 4 ಜೊತೆ ಅನುರೂಪಕೋನಗಳಿವೆ.

(b) ಅಂತರ್‌ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಯಾವುವು?

(i) $\angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ಮತ್ತು$\angle 5$,ಗಳು ಎರಡು ಜೊತೆ ಅಂತರ್‌ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು.(ಏಕೆ?)

(c) ಬಾಹ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಯಾವುವು?

(i) $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 8$, ಗಳು ಎರಡು ಜೊತೆ ಬಾಹ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಕೊನಗಳು(ಏಕೆ?)

(d) ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು ಯಾವುವು?

(i) $\angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 6$ ಗಳು ಛೇದಕರೇಖೆಗೆ ಒಂದೇಪಾರ್ಶದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಜೊತೆ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು (ಏಕೆ?)

ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು, ಅಥವಾ ಸಹ ಅಂತರ ಕೋನಗಳು ಅಥವಾ ಜೋಡಿ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಎನ್ನಬಹುದು.

(e) ಛೇದಕ ರೇಖೆಗೆ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶದಲ್ಲಿರುವ ಹೋರಕೋನಗಳಾವುವು?

(i) $\angle 1, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 7$ ಗಳು ಎರಡು ಜೊತೆ ಛೇದಕರೇಖೆಯ ಒಂದೇಪಾರ್ಶದಲ್ಲಿರುವ ಹೊರಕೋನಗಳು (ಏಕೆ?)

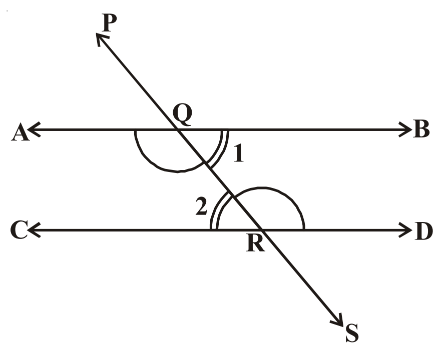
ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶದಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಅಥವಾ ಸಹ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳು ಅಥವಾ ಜೋಡಿ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳೆನ್ನುವರು.

ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು l ಮತ್ತು m ಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆಯೇ? ಹೌದು ಅವು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅನುರೂಪಕೋನಗಳ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ : ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಕರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಏರ್ಪಡುವ ಪ್ರತಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್‌ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧವಿದೆ. (i) $\angle RQB$ ಮತ್ತು $\angle QRC$

(ii) $\angle AQR$ ಮತ್ತು $\angle QRD$?



ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೇ?

ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಛೇದನ ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{PS}$ ಎರಡು ಸಾಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

$\angle RQB = \angle QRC$ ಮತ್ತು $\angle AQR = \angle DRQ$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ $\angle PQA = \angle QRC$ ..... (1) (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಮತ್ತು $\angle PQA = \angle BQR$ ..... (2) (ಏಕೆ ?)

(1) ,(2), ರಿಂದ $\angle RQB = \angle QRC$. ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle AQR = \angle DRQ$.

ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

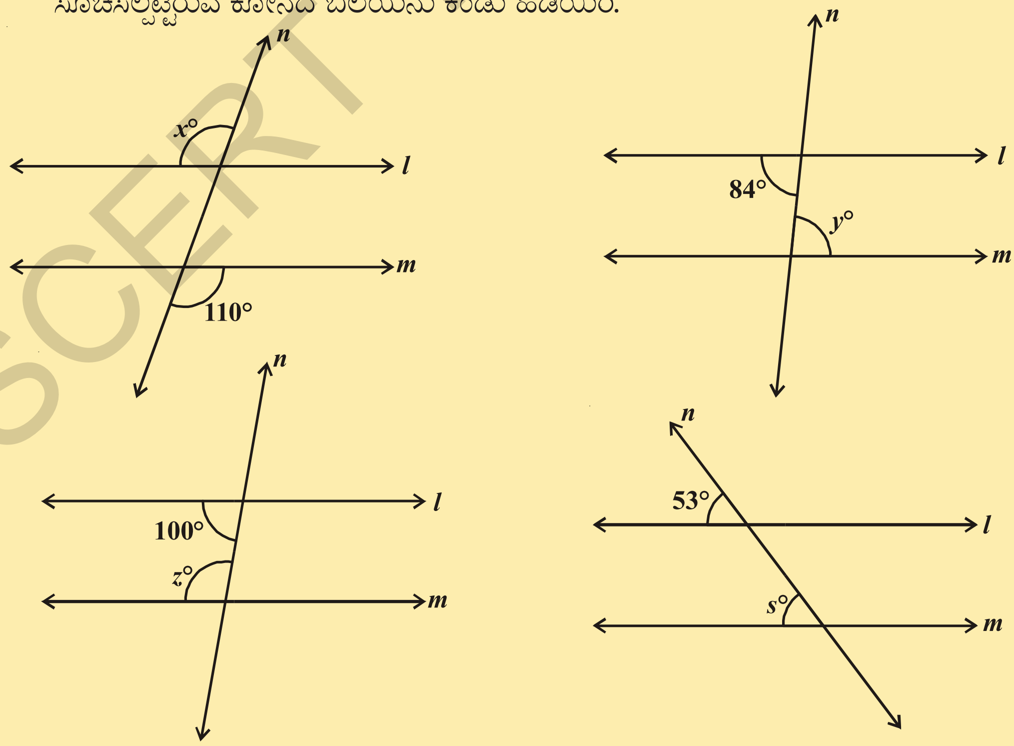
ಪ್ರಮೇಯ 4.2 : ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದನ ರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಏರ್ಪಡುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

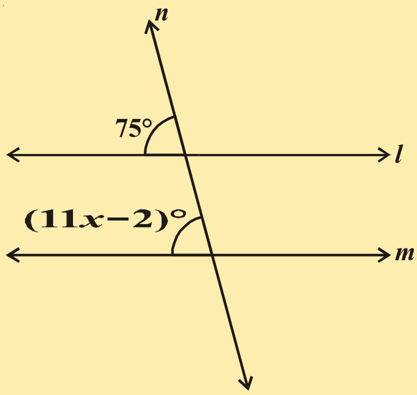
ಪ್ರಮೇಯ4.3 : ಈ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಕ ರೇಖೆಯಿಂದ ಛೇದಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಛೇದಕರೇಖೇಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ.

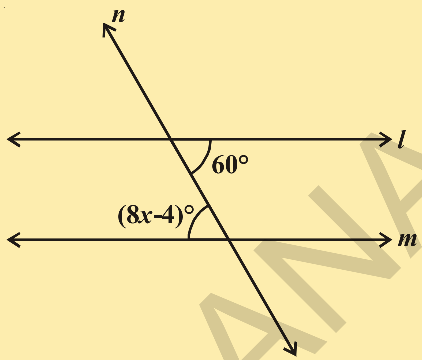
ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ.

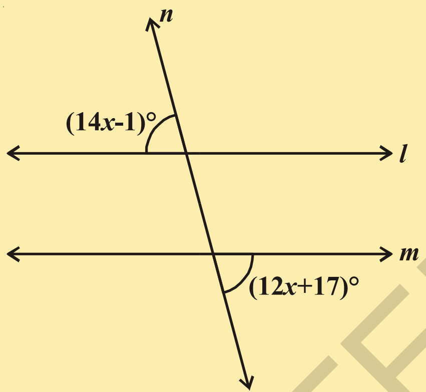
1. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ l,m ಗಳು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು n ಛೇದಕ ರೇಖೆ. ಪ್ರತಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಕೋನದ ಬೆಲೆಯನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

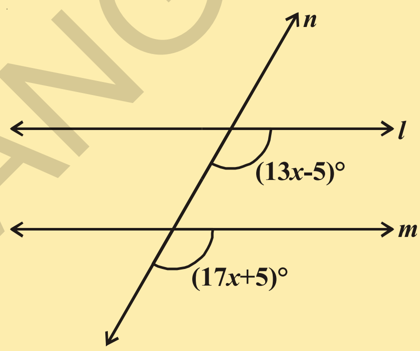


2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ 'x' ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.



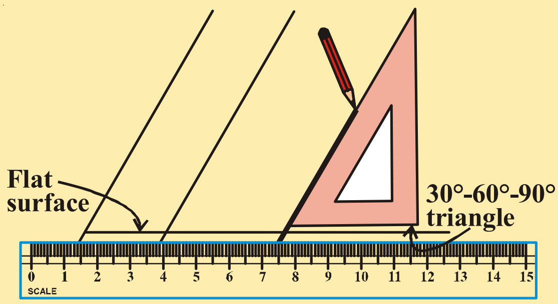






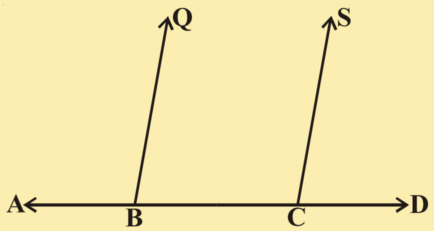
ಚಟುವಟಿಕೆ :

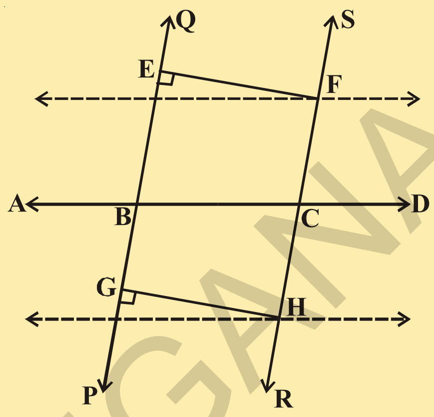
ಒಂದು ಸ್ಕೇಲನ್ನು, ಮೂಲೆಮಟ್ಟವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೂಲೆ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಸ್ಕೇಲಿನ ಮೇಲೆ ಜೋಡಿಸಿ.ಮೂಲೆ ಮಟ್ಟದ ಒರೆ ಅಂಚಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನಿಂದ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಮೂಲೆ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಅದರ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಅಂಚಿನೊಂದಿಗೆ ಜರುಗಿಸಿರಿ. ಮತ್ತೆ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ನಾವು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅವು ಏಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.? ಆಲೋಚಿಸಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮಗೆಳೆಯರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ.



ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ :

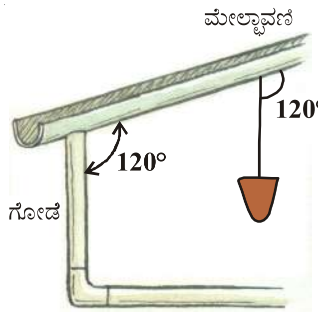
ಸರಳರೇಖೆ $\overleftrightarrow{AD}$ ಮೇಲೆ ಎರಡುಬಿಂದು B,C ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.B C ಗಳ ಬಳಿ $\angle QBA$,$\angle SCB$ ಸಮಾನಕೊನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.QB , SC ಗಳನ್ನು AD ಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ PQ, RS ಸರಳರೇಖೆಗಳೇರ್ಪಡುತ್ತವೆ.





ಏರ್ಪಟ್ಟ PQ.RS ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬರೇಖೆಗಳು EF ,GH ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. EF ,GH ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ? ಆದರಿಂದ ನೀವೇನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಿರಿ? ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ನಡುವೆ ಲಂಬ ದೂರವು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.

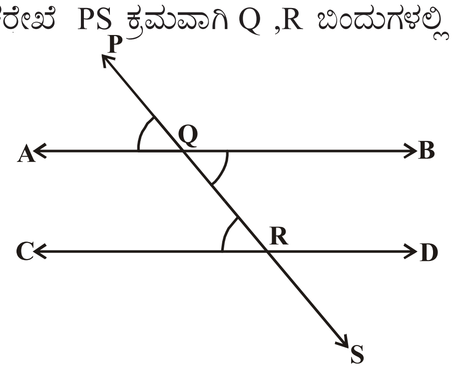
ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ವಿಲೋಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ 1 : ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು.



ಒಂದು ಲಂಬಕವನ್ನು ಒಂದು ತಂತಿಗೆ ತೂಗುಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಆ ತಂತಿಯನ್ನು ಲಂಬಕಗೆರೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆ ಲಂಬಕದ ಭಾರವು ತಂತಿಯನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕೆಳಗೆಳೆಯುವುದರಿಂದ ಆ ತಂತಿಯು ನೇರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಗೋಡೆ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ನಡುವಿನ ಕೋನ 120^0 ಹಾಗೂ ಲಂಬಕದಿಂದುಂಟಾದ ಕೋನ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಸಹ 120^0 ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಮೇಸ್ತ್ರಿಯು ಗೋಡೆಯು ನೆಲಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿದೆ/ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತಾನೆಯೇ. ನಾವು ಈ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಲು ಕಾರಣವೇನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಗೆ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು?

ಮೇಲಿನ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ವಿಲೋಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ. ನಾವು ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದೇ?

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದ $\overleftrightarrow{AB}$ $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳನ್ನು ಛೇದಕರೇಖೆ PS ಕ್ರಮವಾಗಿ Q ,R ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು $\angle BQR$, $\angle QRC$ ಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವಂತೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.



ಅಂದರೆ $\angle RQB = \angle QRC$.

ನಾವು ಈಗ AB || CD ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸ ಬೇಕು.

$\angle RQB = \angle PQA$ (ಏಕೆ) ... (1)

ದರೆ $\angle RQB = \angle QRC$ (ದತ್ತಾಂಶ) ... (2)

(1) , (2) ರಿಂದ

$\angle PQA = \angle QRC$

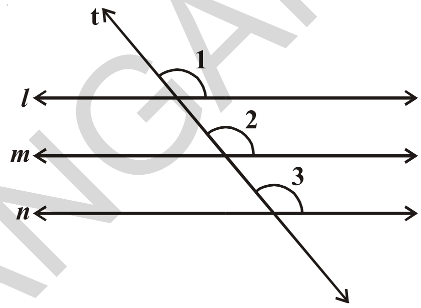
ಆದರೆ ಇವು ಛೇದಕ ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{PS}$ ನಿಂದ ಛೇದಿಸಲ್ಪಡುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಾದ $\overleftrightarrow{AB}$ $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪ ಕೊನಗಳು

ಆದುದರಿಂದ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ವಿಲೋಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ –4.4 : ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಂತರ್ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

4.4.1 ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು.



ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ರೇಖೇಗಳು ಸಮಾಂತವಾಗುತ್ತವೆಯೆ?

ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $m \parallel l$ ಮತ್ತು $n \parallel l$ ಆಗುವಂತೆ ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು l, m, n ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈ ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು l, m, n ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಛೇದಕರೇಖೆ 't' ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಚಿತ್ರದಿಂದ $\angle 1 = \angle 2$ ಹಾಗೆಯೇ $\angle 1 = \angle 3$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ವಿಲೋಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle 2 = \angle 3$ ಆದರೆ ಈ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳು m, n.ಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಯಾತ್ತವೆ.

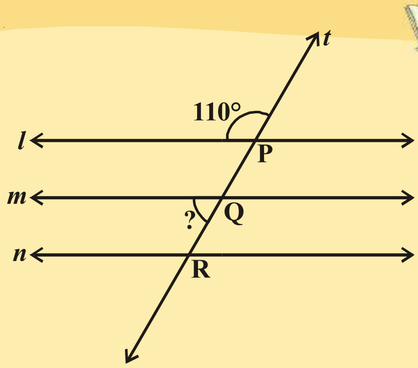
$m \parallel n$ ಹೇಳಬಹುದು. (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ವಿಲೋಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಪ್ರಮೇಯ -4.5 : ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ:

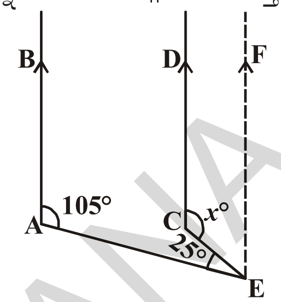
(i) ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನಾರ್ಥಕ ಚಿಹ್ನೆ ಸೂಚಿಸುವ ಕೋನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $\angle P$ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಉದಾಹರಣ-8. ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB|| CD ಆದರೆ '*x*' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : E ಮೂಲಕ AB || CD ಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ EF ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. EF || CD ಮತ್ತು CE ಛೇದಕರೇಖೆ.



$\therefore \angle ECD + \angle FEC = 180^o$

[$\because$ ಛೇದಕರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶದಲ್ಲಿನ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು]

$\Rightarrow x^o + \angle FEC = 180^o \Rightarrow \angle FEC = (180 - x^o)$.

ಮತ್ತೆ, EF || AB ಮತ್ತು AE ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ.

$\angle EAB + \angle FEA = 180^o$ [$\because$ ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿನ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು]

$\Rightarrow 105^o + \angle AEC + \angle FEC = 180^o$

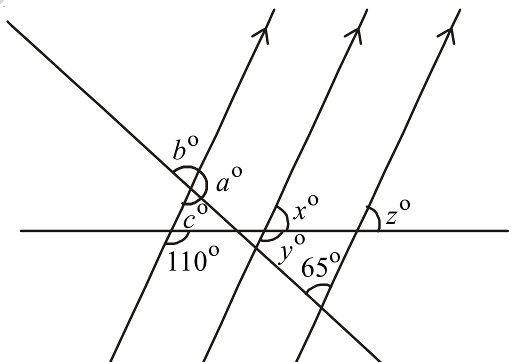
$\Rightarrow 105^o + 25^o + (180^o - x^o) = 180^o$

$\Rightarrow 310 - x^\circ = 180^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 130^\circ$.

ಉದಾಹರಣ-9. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x, y, z ಮತ್ತು a, b, c.ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ



$y^o = 110^o$ ($\because$ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

$\Rightarrow x^o + y^o = 180^o$ (ಸರಳ ಯುಗ್ಮ)

$\Rightarrow x^o + 110^o = 180^o$

$\Rightarrow x^o = (180^o - 110^o) = 70^o$.

$z^o = x^o = 70^o$ ($\because$ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

$c^o = 65^o$ (ಹೇಗೆ)

$a^o + c^o = 180^o$ [ಸರಳ ಯುಗ್ಮ]

$\Rightarrow a^o + 65^o = 180^o$

$\Rightarrow a^o = (180^o - 65^o) = 115^o$.

$b^o = c^o = 65^o$. [$\because$ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು]

ಆದ್ದರಿಂದ, a = 115°, b = 65°, c = 65°, $x = 70^\circ$, $y = 110^\circ$, z = 70°.

ಉದಾಹರಣ 10. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ EF || GH , AB || CDಆದರೆ x ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : $4x^\circ = \angle APR$ (ಏಕೆ)

$\angle APR = \angle PQS$ (ಏಕೆ?)

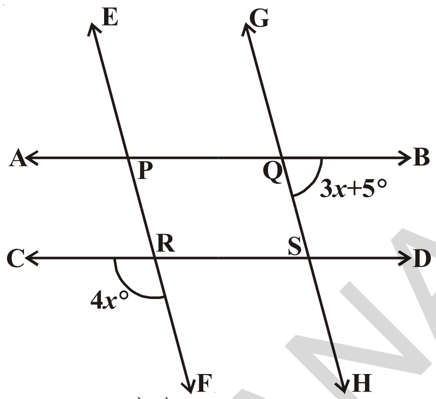
$\angle PQS + \angle SQB = 180°$ (ಏಕೆ?)

$4x° + (3x + 5)° = 180°$

$7x° + 5° = 180°$

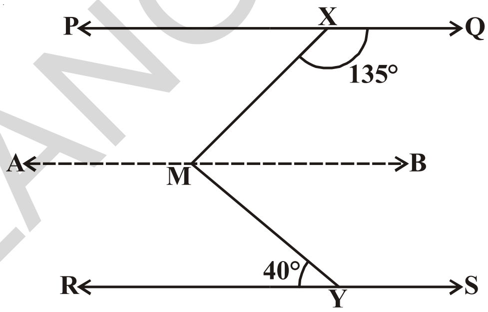
$x° = \dfrac{180° - 5°}{7}$

$= 25°$



ಉದಾಹರಣ -11. ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, PQ || RS, $\angle MXQ = 135^o$ ಮತ್ತು $\angle MYR = 40^o$, ಆದರೆ $\angle XMY$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ಬಿಂದು M ನ ಮೂಲಕ PQ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಸರಳರೇಖೆ AB ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಈಗ, AB || PQ ಮತ್ತು PQ || RS.

ಆದ್ದರಿಂದ AB || RS

ಈಗ ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle MXQ + \angle BMX = 180^o$

($\therefore$ AB || PQ, ಮತ್ತು XM ಛೇದಕರೇಖೆಗೆ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ ಕೋನಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $135° + \angle BMX = 180°$

$\therefore \quad \angle BMX = 45° \quad ...(1)$

ಹಾಗೆಯೇ, $\angle YMB = \angle MYR$ (ಅಂತಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು AB || RS)

$\therefore \quad \angle YMB = 40° \quad ...(2)$

(1) (2), ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ

$\angle BMX + \angle YMB = 45° + 40°$

ಅಂದರೆ, $\angle XMY = 85°$

ಉದಾಹರಣ-12. ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ ಛೇಧಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದರೆ , ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳೂ ಸಹ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಛೇದಕ ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{AD}$ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ B ,C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. $\angle ABQ$ ಕೋನ ಸಮದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಖೆ $\overrightarrow{BE}$ ಹಾಗೆಯೇ $\angle BCS$ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ $\overrightarrow{CF}$ ಯಾಗಿದ್ದು BE || CF.

ನಾವು PQ || RS ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ.

i. ಅನುರೂಪಕೋನಗಳು ಸಮ.

ii. ಅಂತರ್‌ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಸಮಾನ.

iii. ಛೇದಕರೇಖೆಗೆ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

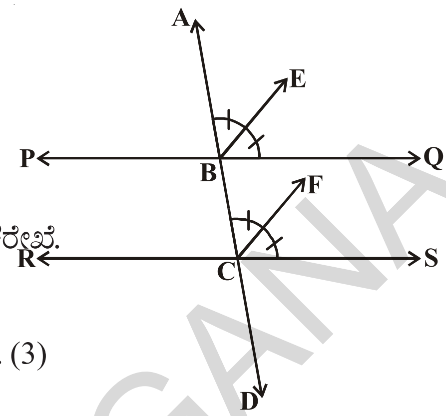
ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ $\angle QBA$ ಗೆ BE ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ..

$\angle EBA = \frac{1}{2}\angle QBA.$ ... (1)

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\angle BCS$ ಗೆ CF ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ.

$\angle BCF = \frac{1}{2}\angle BCS$ ... (2)



ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು BE , CF ಗಳಿಗೆ $\overleftrightarrow{AD}$ ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle ABE = \angle FCB$

(ಅನುರೂಪಕೋನಗಳ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ) ... (3)

(1) ,(2) , (3), ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ

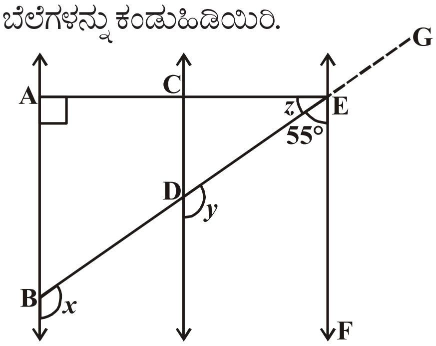
$$\frac{1}{2}\angle QBA = \frac{1}{2}\angle SCB$$

$$\therefore \quad \angle QBA = \angle SCB$$

ಅದರೆ ಇವು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{RS}$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಕರೇಖೆ $\overleftrightarrow{AD}$ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಅನೂರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಮತ್ತು ಇವು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ PQ || RS (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ವಿಲೋಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಉದಾಹರಣ -13. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD ಮತ್ತು CD || EF. ಹಾಗೆಯೇ EA ⊥ AB. ಒಂದು ವೇಳೆ $\angle BEF = 55°$ ಆದರೆ x, y, z ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : BE ಯನ್ನು G ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

ಈಗ $\angle FEG = 180° - 55°$ (ಏಕೆ?)

$= 125°$

ಹಾಗೆಯೇ $\angle FEG = x = y = 125°$ (ಏಕೆ?)

ಈಗ $z = 90° - 55°$ (ಏಕೆ?)

$= 35°$

ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಗಳು.

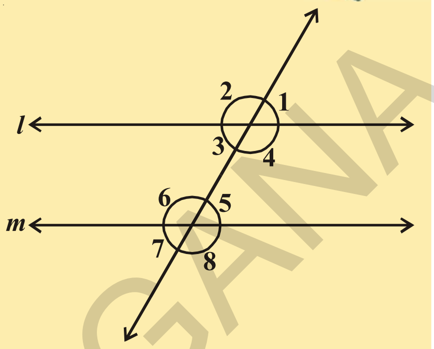
1. ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಸಮಾನವೆಂದು ತೋರಿಸುವುದು.
2. ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಸಮಾನವೆಂದು ತೋರಿಸುವುದು.
3. ಛೇದಕರೇಖೆಗೆ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವೆಂದು ತೋರಿಸುವುದು.
4. ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು , ಮೂರನೇ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬರೇಖೆ ಗಳೆಂದು ತೋರಿಸುವುದು.
5. ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ,ಮೂರನೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.3

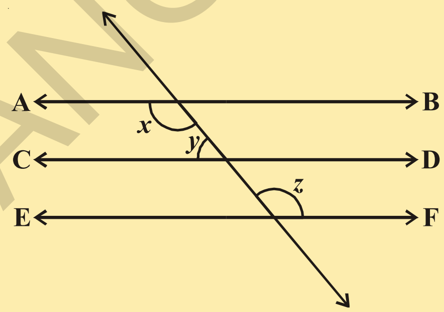
1. $l \parallel m$ ಆದರೆ $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಪ್ರತಿ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

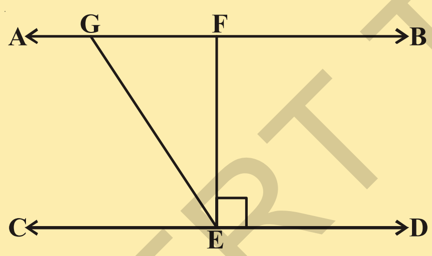
ಹೇಳಿಕೆ	ಕಾರಣಗಳು
i. $l \parallel m$	__________
ii. $\angle 1 = \angle 5$	__________
iii. $\angle 5 + \angle 8 = 180°$	__________
iv. $\angle 1 + \angle 8 = 180°$	__________

v. $\angle 1$, $\angle 8$ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳು__________



2. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD; CD || EF ಮತ್ತು $y : z = 3 : 7$, ಆದರೆ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

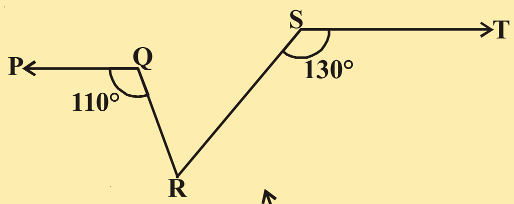




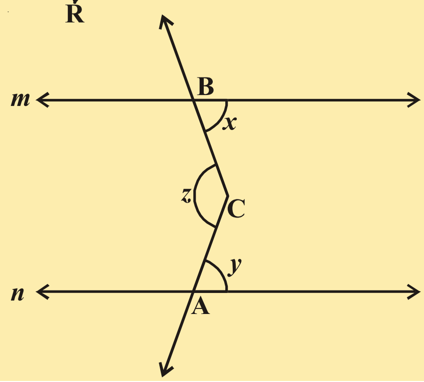
3. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD, EF ⊥ CD ಮತ್ತು $\angle$DEG = 126°, ಆದರೆ $\angle$AGE, $\angle$GEF ಮತ್ತು $\angle$EGF ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PQ || ST, $\angle$PQR = 110° ಮತ್ತು $\angle$RST = 130°, ಹಾಗದರೆ $\angle$SRQ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

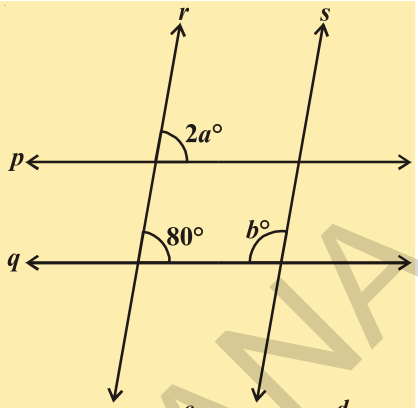
[**ಸೂಚನೆ :** ಬಿಂದು R ಮೂಲಕ ST ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.]



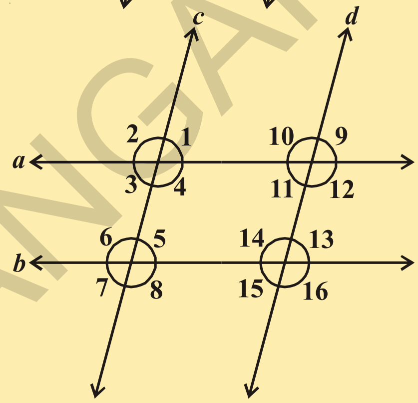
5. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $m \parallel n$. A, B ಸರಳರೇಖೆಗಳು m ,n ಗಳಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು,ಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B. m ,n ರೇಖೆಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ 'C' ಯಾವುದಾದರು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ $\angle$ACB ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

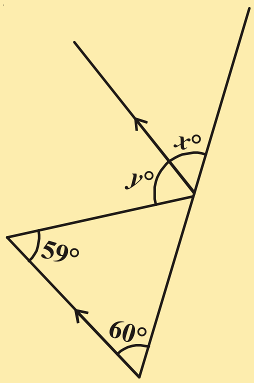


6. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $p \parallel q$ ಮತ್ತು $r \parallel s$ ಆದರೆ a, b ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



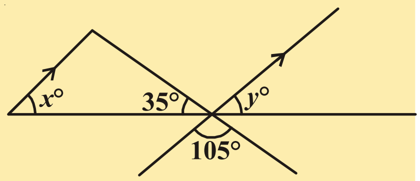
7. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $a \parallel b$ ಮತ್ತು $c \parallel d$, ಆದರೆ (i) $\angle 1$ (ii) $\angle 2$ ಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

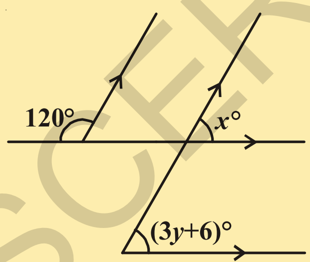




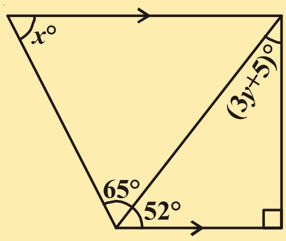
8. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಾಣದ ಗುರ್ತಿರುವ ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳಾದರೆ x , y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಾಣದ ಗುರ್ತಿರುವ ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳಾದರೆ x ; y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.





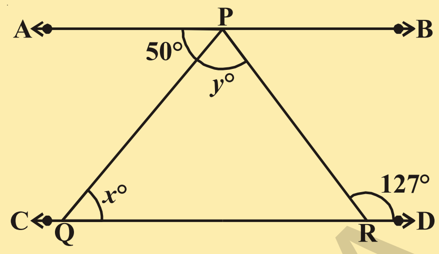
10. ಚಿತ್ರದಿಂದ x ,y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



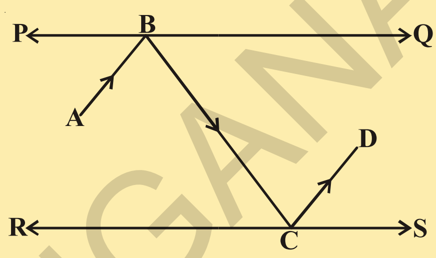
11. ಚಿತ್ರದಿಂದ x , y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:
" ಒಂದು ಕೋನದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ಕೋನದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಲಂಬರೇಖೆಗಳಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನಗಳು ಅಥವಾ ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ ".

13. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD, $\angle APQ = 50°$ ಮತ್ತು $\angle PRD = 127°$, ಆದರೆ x , y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

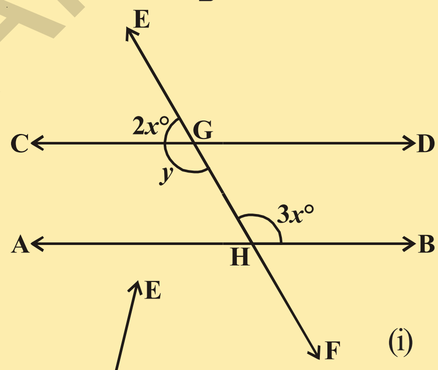


14. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PQ ಮತ್ತು RS ಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದ ಎರಡು ದರ್ಪಣಗಳು. ಪತನ ಕಿರಣ $\overrightarrow{AB}$ ದರ್ಪಣವು PQನ್ನು ಬಿಂದು B ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಫಲಿತ ಕಿರಣ $\overline{BC}$ ದರ್ಪಣ RS ನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿ ಮತ್ತು $\overline{CD}$ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿಫಲನವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗದರೆ AB || CD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

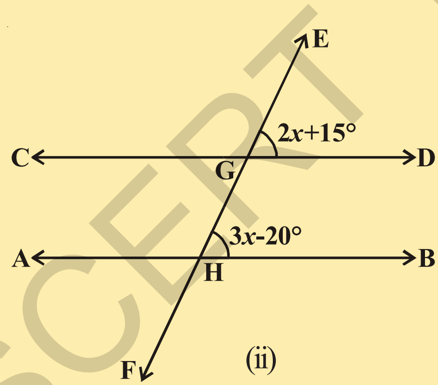


[ಸೂಚನೆ : ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳು ಕೂಡ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.]

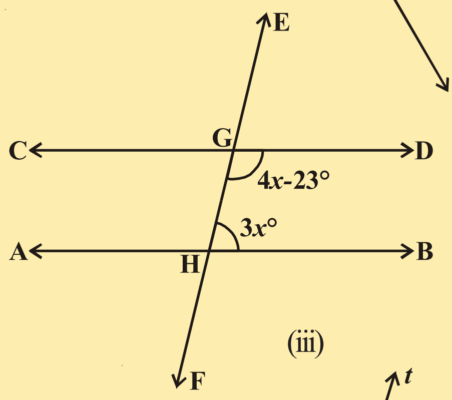
15. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD ಛೇದಕರೇಖೆ EF ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದ AB , CD ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ G ,H ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ x ,y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.



(i)

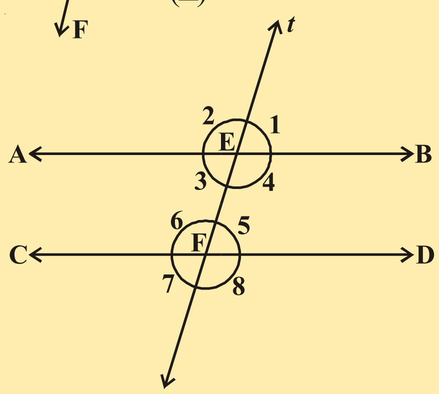


(ii)

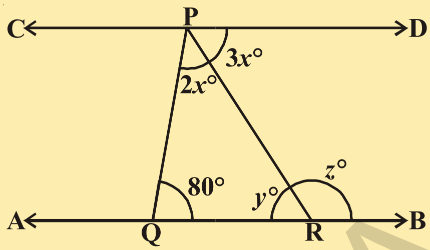


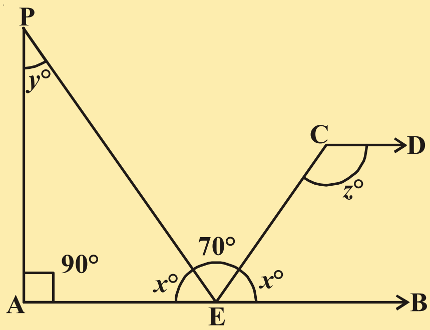
(iii)

16. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD. 't' ಎಂಬ ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತತು F ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಖಂಡಿಸುತ್ತದೆ. $\angle 2 : \angle 1 = 5 : 4$, ಆದರೆ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



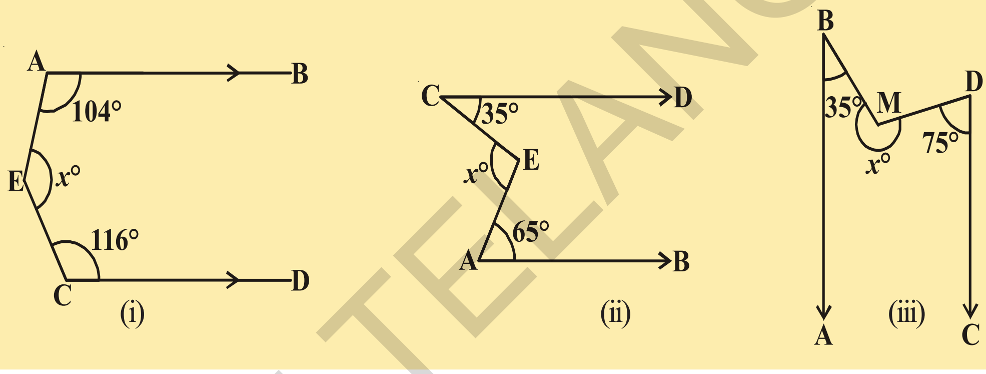
17. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD. ಆದರೆ x, y , z ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.





18. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD ಆದಾಗ x, y , z.ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD. ಆದ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

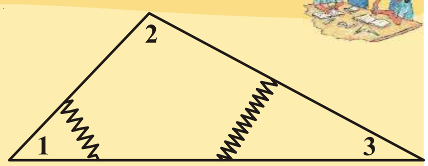


4.5 ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ

ಈಗ ನಾವು ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

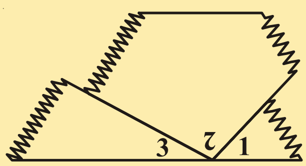
ಚಟುವಟಿಕೆ :

- ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದಯ ದೊಡ್ಡ ಕಾಗದದ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕತ್ತರಿಸಿ.ಚಿತ್ರ 1 ರಚಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 1 ರಚಿಸಿ.

- ಕೋನಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರಿ.
- ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಈ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಪಕ್ಕ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಚಿತ್ರ 2 ರಚಿಸಿ.

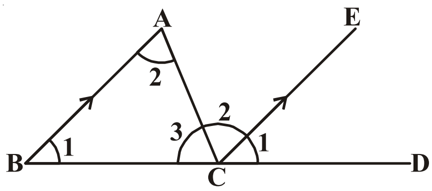


1. ಈ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಸೇರಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ ಯಾವುದೋ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಕೋನದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

2. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕುರಿತು ಬರೆಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ 2 ರಚಿಸಿ.

ಪ್ರಮೇಯ -4.6 : ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°.



ದತ್ತ : ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ

ಸಾಧನೀಯ : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

ರಚನೆ : BC ರೇಖೆಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ

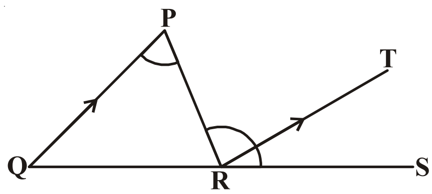
'C' ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ BA ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ CE ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ :

$BA \parallel CE$	[ರಚನೆಯ ಪ್ರಕಾರ]
$\angle CBA = \angle DCE$ .....(1)	[ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ]
$\angle BAC = \angle ECA$ .....(2)	[AB, CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]
$\angle BCA = \angle ACB$ .....(3)	[ಒಂದೇ ಕೋನ ಅಥವಾ ಪತಿಫಲನ ನಿಯಮ]
$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB =$ $\angle DCE + \angle ECA + \angle ACB$	[ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ]
ಆದರೆ $\angle DCE + \angle ECA + \angle ACB = 180^0$	[ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನ]
$\therefore \angle CBA + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$	
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$	

ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಏರ್ಪಡುವುದು ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

QR ಬಾಹುವನ್ನು S ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಬಾಹ್ಯಕೋನ $\angle SRP$



$\angle PRQ + \angle SRP = 180^\circ$? ಆಗುತ್ತದೆಯೆ? (ಏಕೆ?) .....(1)

ಹಾಗೆಯೇ

$\angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR = 180^\circ$ (ಏಕೆ ?) .....(2)

(1) , (2), ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $\angle PRQ + \angle SRP = \angle PRQ + \angle RQP + \angle QPR$

$\therefore \angle SRP = \angle PQR + \angle QPR$

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ-4.7 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಬಾಹ್ಯಕೋನವು ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ,

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೆಯ ದಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು ಅದರ ಪ್ರತಿ ಅಂತರ್‌ಕೋನಕ್ಕಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ವಿಷಯವನ್ನಾಧರಿಸಿ ಈ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ.

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

ಉದಾಹರಣೆ-14. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳು $(2x)°$, $(3x + 5)°$ ಮತ್ತು $(4x - 14)°$.

ಆದರೆ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ತ್ರಿಭುಜ ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore\ 2x° + 3x° + 5° + 4x° - 14° = 180° \Rightarrow 9x° - 9° = 180°$

$\Rightarrow 9x° = 180° + 9° = 189°$

$\Rightarrow x = \dfrac{189°}{9°} = 21.$

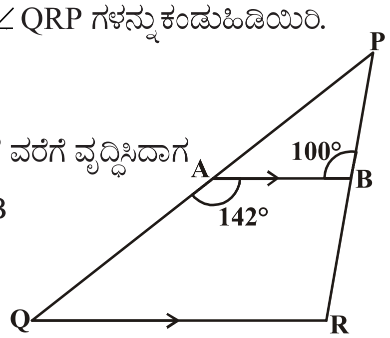
$\therefore\ 2x° = (2\times 21)° = 42°,\ (3x+5)° = [(3\times 21 + 5)]° = 68°.$

$(4x - 14)° = [(4\times 21) - 14]° = 70°$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಭುಜಕೋನಗಳು 42°, 68° ಮತ್ತು 70°.

ಉದಾಹರಣೆ-15. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $AB \parallel QR$, $\angle BAQ = 142°$ ಮತ್ತು $\angle ABP = 100°$.

ಆದರೆ (i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ ಮತ್ತು (iii) $\angle QRP$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : (i) $\angle APB = x°$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ΔPAB ಯಲ್ಲಿ ಬಾಹು PA ಯನ್ನು Q ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ

$\therefore$ ಬಾಹ್ಯಕೋನ $\angle QAB = \angle PBA + \angle APB$

$\Rightarrow 142° = 100° + x°$

$\Rightarrow x° = (142° - 100°) = 42°.$

$\therefore\ \angle APB = 42°,$

(ii) ಈಗ $AB \parallel QR$ ಮತ್ತು PQ ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ.

$\therefore\ \angle QAB + \angle RQA = 180^0$ [ಛೇದನರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°]

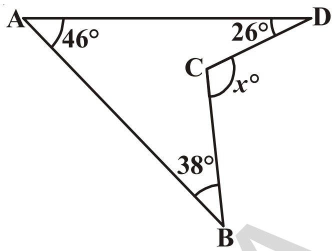
$\Rightarrow\ 142° + \angle AQR = 180°,$

$\therefore\ \angle AQR = (180° - 142°) = 38°.$

(iii) $AB \parallel QR$ ಮತ್ತು PR ಛೇದಕ ರೇಖೆಯಾದ್ದರಿಂದ

$\angle PRQ = \angle PBA = 100°$ [ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು]

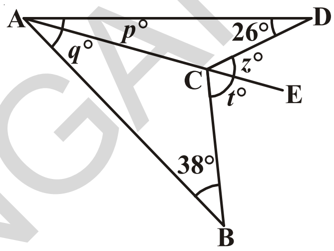
ಉದಾಹರಣೆ-16. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

AC ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅದನ್ನು E ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

$\angle DAE = p^\circ$, $\angle BAE = q^\circ$, $\angle DCE = z^\circ$ ಮತ್ತು $\angle ECB = t^\circ$. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನವು ಅದರ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ಆದ್ದರಿಂದ



$z^\circ = p^\circ + 26^\circ$

$t^\circ = q^\circ + 38^\circ$

$\therefore\ z^\circ + t^\circ = p^\circ + q^\circ + (26+38)^\circ = p^\circ + q^\circ + 64^\circ$

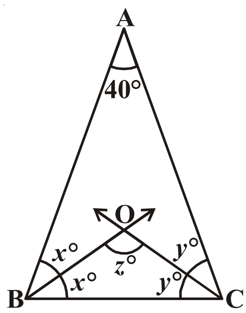
ಆದರೆ, $p^\circ + q^\circ = 46$. $(\because \angle DAB = 46^\circ)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $z^\circ + t^\circ = 46 + 64 = 110^\circ$.

ಆದುದರಿಂದ $x^\circ = z^\circ + t^\circ = 110^\circ$.

ಉದಾಹರಣೆ-17. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle A = 40^\circ$. $\overrightarrow{BO}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{CO}$ ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ ಗಳು ಆದರೆ $\angle$ BOC ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : BO ಎಂಬುದು $\angle$ B ನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ. CO ಎಂಬುದು $\angle$C ನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ



$\angle CBO = \angle OBA = x^\circ$ ಮತ್ತು $\angle OCB = \angle ACO = y^\circ$.

ಆಗ $\angle B = (2x)^\circ$, $\angle C = (2y)^\circ$ ಮತ್ತು $\angle A = 40^\circ$.

ಆದರೆ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. (ಹೇಗೆ?)

$2x^\circ + 2y^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

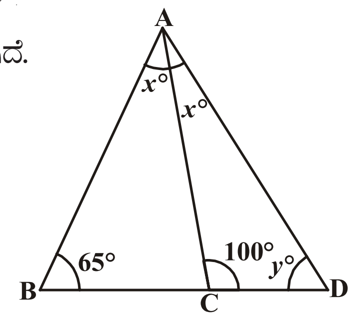
$\Rightarrow 2(x+y)^\circ = 140^\circ$

$= x^\circ + y^\circ = \dfrac{140^\circ}{2} = 70^\circ$.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

ಉದಾಹರಣೆ-18. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ x , y ಬೆಲೆಗಳ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ತ್ರಿಭುಜ ΔABCಯ ಬಾಹು BC ಯನ್ನು D ಯ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಬಾಹ್ಯಕೋನ $\angle DCA = \angle CBA + \angle BAC$

$\therefore\ 100^\circ = 65^\circ + x^\circ$

$\Rightarrow x^\circ = (100^\circ - 65^\circ) = 35^\circ$.

$\therefore\ \angle CAD = \angle BAC = 35^\circ$

ΔACD, ಯಲ್ಲಿ :

$\angle CAD + \angle DCA + \angle ADC = 180^\circ$ (ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

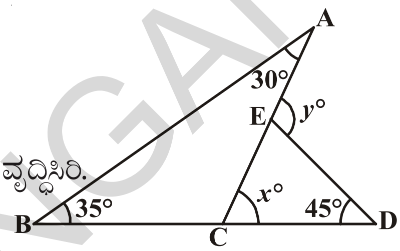
$\Rightarrow 35^\circ + 100^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 135^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow y^\circ = (180^\circ - 135^\circ) = 45^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 35^\circ, y = 45^\circ$.

ಉದಾಹರಣೆ-19. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ x , y ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : ΔABCಯ ಬಾಹು BCಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ಬಾಹ್ಯಕೋನ $\angle ACD = \angle BAC + \angle CBA$

$\Rightarrow \quad x^\circ = 30^\circ + 35^\circ = 65^\circ$.

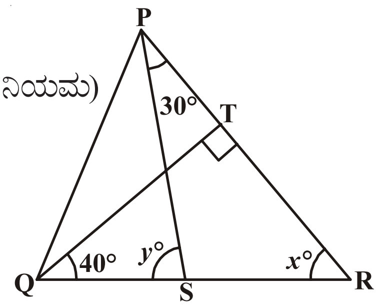
ಮತ್ತೆ ΔDCEಯಲ್ಲಿ ಬಾಹು CE ಯನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

$\therefore$ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನ $\angle DEA = \angle EDC + \angle ECD$

$\Rightarrow \quad y = 45 + x^\circ = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 65^\circ$ ಮತ್ತು $y = 110^\circ$.

ಉದಾಹರಣೆ-20. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $QT \perp PR$, $\angle RQT = 40^\circ$ ಮತ್ತು $\angle SPR = 30^\circ$, ಆದರೆ x , y ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಧನೆ : ΔTQR ನಲ್ಲಿ

$90^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ನಿಯಮ)

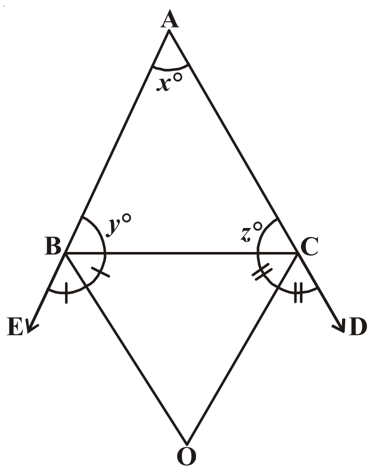
ಆದ್ದರಿಂದ $\quad x^\circ = 50^\circ$

ಈಗ $\quad y^\circ = \angle SPR + x^\circ$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ)

$y^\circ = 30^\circ + 50^\circ$

$= 80^\circ$

ಉದಾಹರಣೆ-21. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC ಬಾಹುಗಳು AB , AC ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E , D ಬಿಂದುಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. $\angle CBE$, $\angle BCD$ ಕೊನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BO, CO ಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ..



ಸಾಧನೆ : $\angle EBC$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ BO

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle OBC = \frac{1}{2} \angle EBC$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - y^\circ)$

$= 90^\circ - \frac{y^\circ}{2} \quad ...(1)$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle BCD$ನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ CO.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$= \frac{1}{2}(180° - z°)$

$= 90° - \frac{z°}{2}$ ...(2)

ΔBOCಯಲ್ಲಿ $\angle COB + \angle BCO + \angle OBC = 180°$ ...(3)

(1) ,(2) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\angle COB + 90° - \frac{z°}{2} + 90° - \frac{y°}{2} = 180°$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle COB = \frac{z°}{2} + \frac{y°}{2}$

ಇಲ್ಲವೇ, $\angle COB = \frac{1}{2}(y° + z°)$ ... (4)

ಇದನ್ನು $x° + y° + z° = 180°$ (ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ನಿಯಮ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $y° + z° = 180° - x°$

ಆದ್ದರಿಂದ, (4)ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

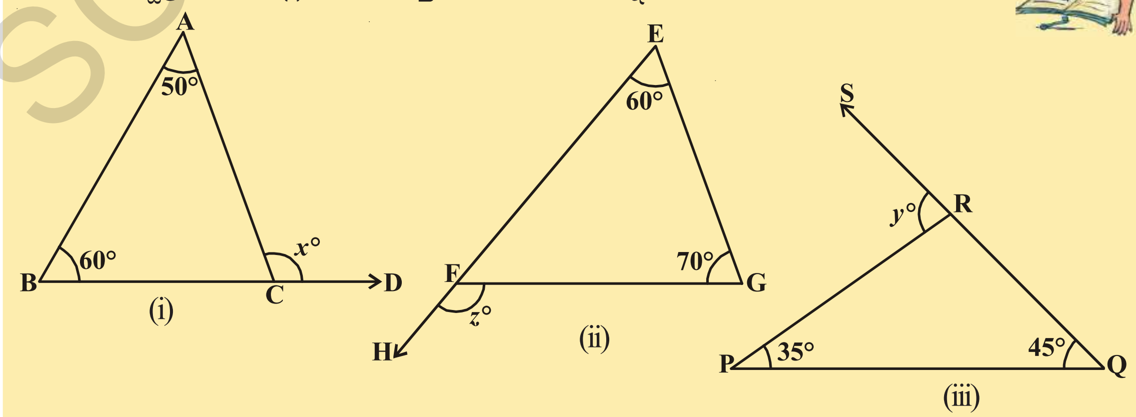
$$\angle COB = \frac{1}{2}(180° - x°)$$

$$= 90° - \frac{x°}{2}$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$$

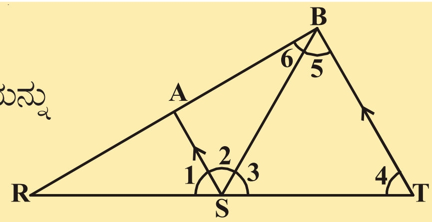
ಅಭ್ಯಾಸ 4.4

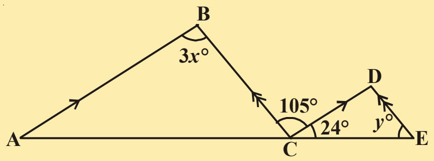
1. ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ x, y ಮತ್ತು z ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



2. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AS || BT; $\angle 4 = \angle 5$

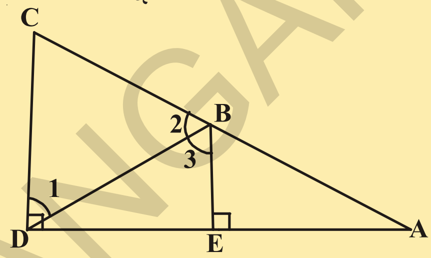
$\angle$TSA ನ್ನು $\overrightarrow{SB}$ ಕೋನಾರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $\angle 1$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

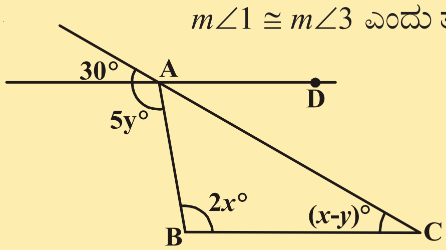




3. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || CD; BC || DE ಆದರೆ x , y ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

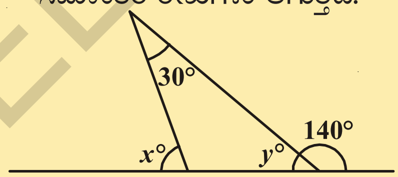
4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ BE $\perp$ DA ಮತ್ತು CD$\perp$DA ಎಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.ಆದರೆ $m\angle 1 \cong m\angle 3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



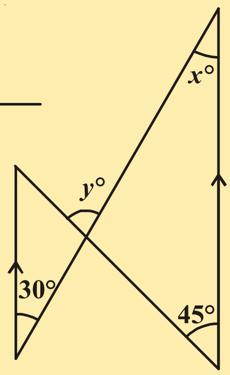


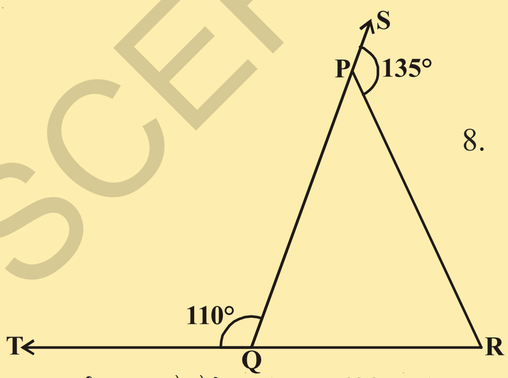
5. x, y ಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ AD ,BC ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಆಗುತ್ತದೆ.

6. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x , y ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



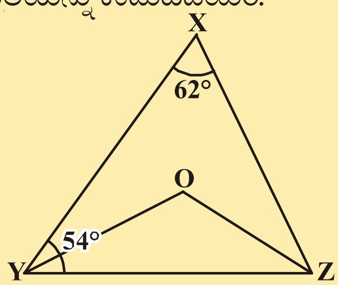
7. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಾಣದ ಗುರ್ತುಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ x , y ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



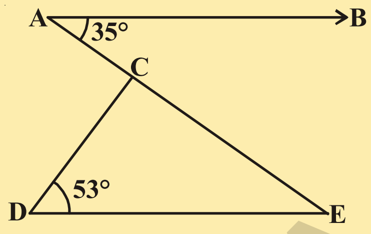


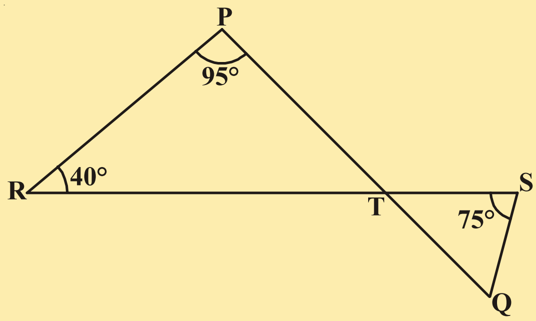
8. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle$PQR ನ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ QP ಮತ್ತು RQ , S ಮತ್ತು T ಬಿಂದುಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. $\angle RPS = 135°$, $\angle PQT = 110°$, ಆದರೆ $\angle$PRQ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle X = 62°$, $\angle ZYX = 54°$. ΔXYZ ನಲ್ಲಿ $\angle$XYZ ಮತ್ತು $\angle$XZY ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ YO ಮತ್ತು ZO ಆದರೆ $\angle$OZY ಮತ್ತು $\angle$YOZ ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

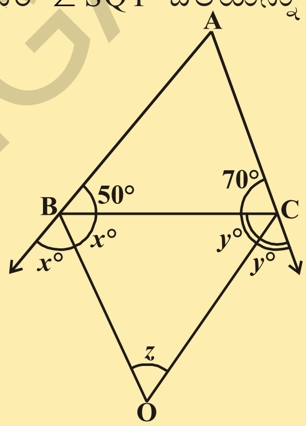


10. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB || DE, ∠BAC = 35° ಮತ್ತು ∠CDE = 53°, ಆದರೆ ∠DCE ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

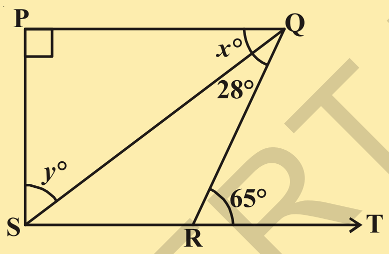




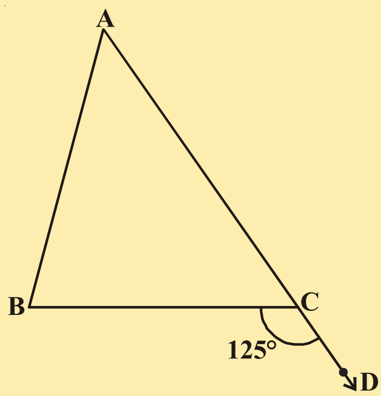
11. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PQ , RS ಗಳು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ∠PRT = 40°, ∠TPR = 95° ಮತ್ತು ∠TSQ = 75°, ಆದರೆ ∠SQT ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



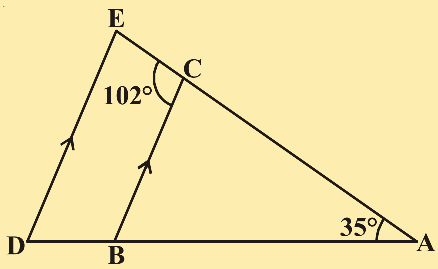
12. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಯಲ್ಲಿ ∠B = 50° ಮತ್ತು ∠C = 70°. AB ,AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳ ಕೋನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಿಕೊಂಡಾಗ. 'z' ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. 'z' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



13. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PQ ⊥ PS, PQ || SR, ∠SQR = 28° ಮತ್ತು ∠TRQ = 65°, x , y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

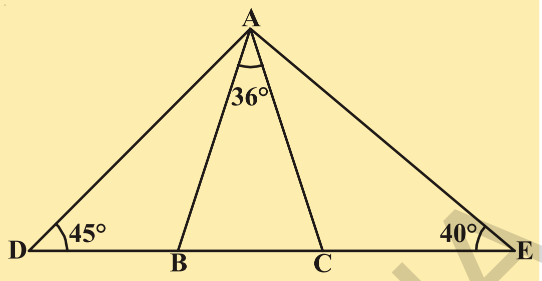


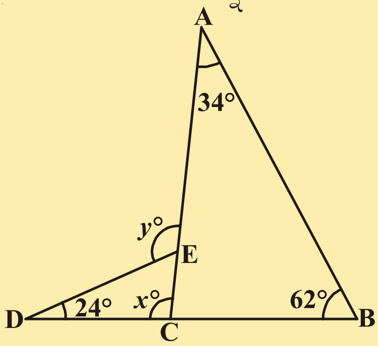
14. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABCಯ ಬಾಹು ACಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ∠BCD = 125° ಆದರೆ ∠A : ∠B = 2 : 3, ಆದರೆ ∠A ಮತ್ತು ∠B ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



15. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ BC || DE, ∠BAC = 35° ಮತ್ತು ∠BCE = 102° ಎಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ (i) ∠BCA (ii) ∠ADE ಮತ್ತು (iii) ∠CED ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB =AC, ∠BAC = 36°, ∠ADB = 45° ಮತ್ತು ∠AEC = 40°. ಎಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ (i) ∠ABC (ii) ∠ACB (iii) ∠BAD (iv) ∠EAC ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.





17. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ x ,y ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

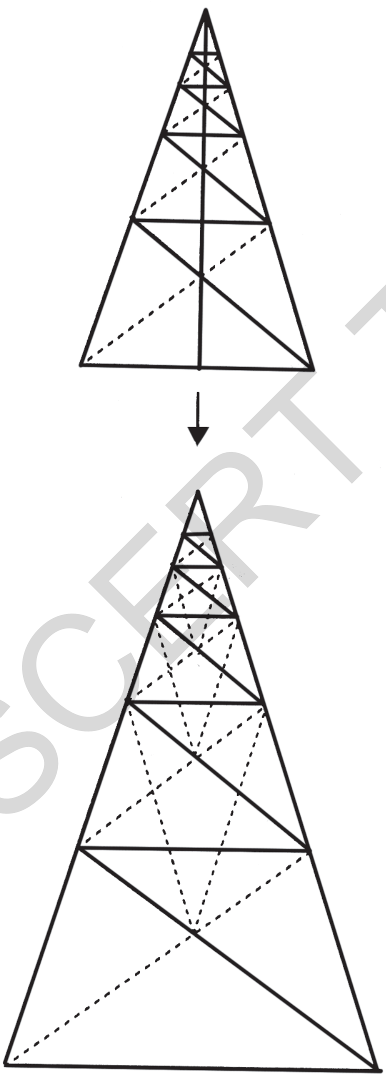
- **ಸರಳಯುಗ್ಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ :** ಒಂದು ಕಿರಣವು ಪ್ರಾರಂಭ ಬಿಂದು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°.
- **ಸರಳಯುಗ್ಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ವಿಲೋಮ :**

  ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.
- **ಪ್ರಮೇಯ**: ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಿಕೊಂಡಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.
- **ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ:** ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- **ಪ್ರಮೇಯ**:: ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಪ್ರತಿ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ.
- **ಪ್ರಮೇಯ**:: ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳು.
- **ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ವಿಲೋಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ**:

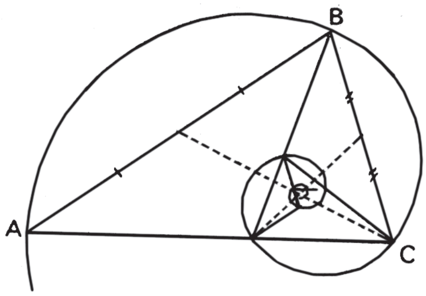
  ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು.
- **ಪ್ರಮೇಯ** : ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಜೊತೆ ಆಂತರ್ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾದರೆ ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

- **ಪ್ರಮೇಯ** : ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಛೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಕಡೆ ಇರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾದಾಗ ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು.
- **ಪ್ರಮೇಯ** : ಕೊಟ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು.
- **ಪ್ರಮೇಯ :** ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^{o}.
- **ಪ್ರಮೇಯ** : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?



ಸ್ವಯಂ ರೂಪಗೊಳ್ಳುವ ಸ್ವರ್ಣ ತ್ರಿಭುಜ.ಸ್ವರ್ಣ ತ್ರಿಭುಜ ವೆಂಬುದು ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಇದರಲ್ಲಿ ಪಾದ ಕೋನಗಳು 72^{o} ಮತ್ತು 36^{o}. ಪಾದಕೋನಕ್ಕೆ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದರೆ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಕೂಡ ಸ್ವರ್ಣ ತ್ರಿಭುಜಗಳೇ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಸ ಬಹುದು.



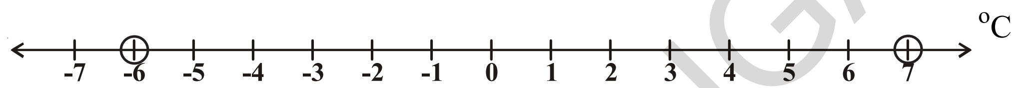
ಈ ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮಕೋನ ಸರಪಳಿಯನ್ನೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಸ್ವರ್ಣದ ಅನುಪಾತ $\phi = |AB| / |BC| = 1.618 \ldots$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧವಾದ ಅನಂತ ಆರೋಹಣ ಸ್ವರ್ಣ ತ್ರಿಭುಜಗಳಮೇಲೆ ಅನಂತ ಆರೋಹಣ ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಪಂಚಭುಜಗಳ ಐದು ಬಿಂದುಗಳು ಸಹ ಸ್ವರ್ಣ ತ್ರಿಭುಜಗಳೇ !.

05

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿ

5.1 ಪರಿಚಯ :

ಹಿಮಾಚಲ ಪ್ರದೇಶ ರಾಜ್ಯದ ಕುಫ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಡಿಸೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನ ನಮೂದಾದ ಕನಿಷ್ಠ – ಗರಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣಾಂಶಗಳು -6^o ಮತ್ತು 7^o . ಇವುಗಳನ್ನು ನೀನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ ?



ಇಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯೆಂಬುದು ಒಂದು ದಿನ ನಮೂದಾದ ಉಷ್ಣಾಂಶದ ವಿವರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಸೂಚಕರೇಖೆಯಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಎಂಟು ಜನ A,B,C,D,E,F, G ಮತ್ತು H ಗಳು ಚಲನಚಿತ್ರ ಮಂದಿರದ ಮುಂದೆ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾರೆ. ಟಿಕೆಟ್ ಕೌಂಟರ್‌ನಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದರೆ A ಮೊದಲ ವ್ಯಕ್ತಿ ಮತ್ತು H ಕೊನೆಯ ವ್ಯಕ್ತಿ ಆಗುತ್ತಾನೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಕೆಫೆಯನ್ನು ಸೂಚ್ಯಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ 'H' ಮೊದಲ ವ್ಯಕ್ತಿ ಮತ್ತು 'A' ಕೊನೆಯ ವ್ಯಕ್ತಿಯಾಗುತ್ತಾನೆ. ಸೂಚಕ ಬದಲಾದಂತೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. 9ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಆಟದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಿಂತಿದ್ದಾರೆ.

ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ ಸುಧಾ ನಿಂತಿರುವ ಸ್ಥಾನಯಾವುದೆಂದು ನೀನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ?

"ಸುಧಾ 2$^{ನೇ}$ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾಳೆ "ಎಂದು ರಮ ಹೇಳಿದಳು.

"ಸುಧಾ 4$^{ನೇ}$ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾಳೆ "ಎಂದು ಪಾವನಿ ಹೇಳಿದಳು.

"ಸುಧಾ 2$^{ನೇ}$ ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು 4$^{ನೇ}$ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾಳೆಂದು "ನಸೀಮ ಹೇಳಿದಳು.

ಮೇಲಿನವರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಸರಿಯಾದ ಮಾಹಿತಿ ನೀಡಿದ್ದಾರೆ?ನಸೀಮ ನೀಡಿದ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀನು ಸುಧಾಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ ? 1$^{ನೇ}$ ಕಂಬಸಾಲು 5$^{ನೇ}$ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮಾಧವಿಯನ್ನು ನೀನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆಯಾ ?

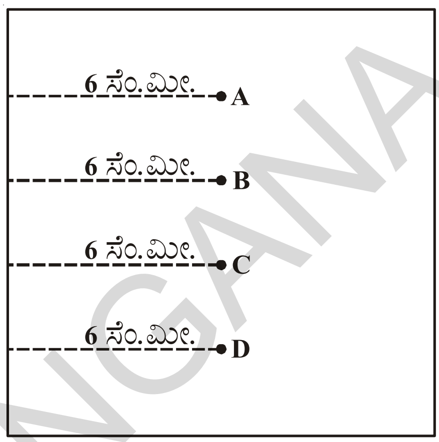
ಆದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) (3$^{ನೇ}$ ಕಂಬಸಾಲು, 6$^{ನೇ}$ ಅಡ್ಡಸಾಲು) (ii) (5$^{ನೇ}$ ಕಂಬಸಾಲು, 2$^{ನೇ}$ ಅಡ್ಡಸಾಲು)

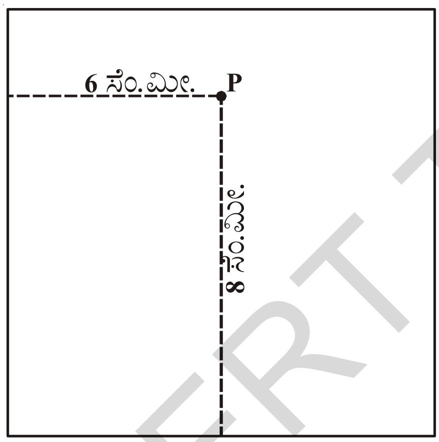
ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ನೀವು ಎಷ್ಟು ನಿರ್ದೇಶನಾ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವೆ? ಅವು ಯಾವುವು?

ಮತ್ತೊಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಇಡಲು ಶಿಕ್ಷಕಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹೇಳಿದಳು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಬಿಂದುವು ಕಾಗದದ ಎಡಭಾಗದ ಅಂಚಿನಿಂದ 6 ಸೆಂ.ಮೀಟರ್‌ಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರಲಿ ಎಂದು ಆಕೆ ಸೂಚಿಸಿದಳು. ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ವಿಧದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದರು.



ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರ ದಲ್ಲಿನ ಯಾವ ಬಿಂದುವ ಕೊಟ್ಟ ಸೂಚನೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಗುರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ನೀನು ಭಾವಿಸುವೆ? ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದು A,B,C , D ಗಳು ಕಾಗದದ ಎಡಭಾಗದ ಅಂಚಿನಿಂದ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳೂ ಸರಿಯಾಗಿವೆ. ಇದರಿಂದ ಬಿಂದುವಿನ ಸರಿಯಾದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಲು ಮತ್ತೊಂದು ಸೂಚನೆ ಅವಶ್ಯಕವೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಕಾಗದದ ಮೇಲಿನ ಅಥವಾ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಚಿನಿಂದ ಆ ಬಿಂದು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚನೆ ನೀಡಿದರೆ ನಾವು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆವು.



ಈ ಸಾರಿ ಬಿಂದು ಎಡ ಅಂಚಿನಿಂದ 6ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಚಿನಿಂದ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಶಿಕ್ಷಕಿ ತಿಳಿಸಿದರು. ಈ ಎರಡು ಸೂಚನೆಗಳಿಂದ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು?

ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆವು. ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಲು ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ನಿರ್ದೇಶನ (ಸೂಚನೆಗಳು) ಅವಶ್ಯಕ ವಾಗುತ್ತವೆ ?

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಲು ನಮಗೆ ಎರಡು ನಿರ್ದೇಶನಗಳು ಅವಶ್ಯಕ. ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು (6, 8) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಮೇಲಿನ ಅಂಚಿನಿಂದ 7 ಸೆಂ.ಮೀ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ನಿನಗೆ ಹೇಳಿದರೆ ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ನೀನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ?

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ :

ನಿನ್ನ ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾರಾದರೂ ಐದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕುಳಿತ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ (ರಿಂಗ್ ಆಟ)

ಜಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ, ಎಗ್ಜಿಬಿಷನ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀನು ರಿಂಗ್ ಆಟವನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀಯಾ? ಕೆಲವು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯೂ ಜೋಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಇವುಗಳ ಮೇಲೆ ನಾವು ರಿಂಗುಗಳನ್ನು ಎಸೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ತುಂಬಿರಿ.

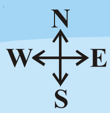
ವಸ್ತು	ಕಂಬಸಾಲು	ಅಡ್ಡ ಸಾಲು	ಸ್ಥಾನ
ಪರ್ಸ್	3	4	(3,4)
ಬೆಂಕಿಪೊಟ್ಟಣ	....	3	(,3)
ಕ್ಲಿಪ್	....	....	....
ಆಟಿಕೆ	....	....	....
ಸೋಪು	....	....	....

$3^{ನೇ}$ ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು $4^{ನೇ}$ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತು – $4^{ನೇ}$ ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು $3^{ನೇ}$ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತು ಒಂದೆಯೇ ?

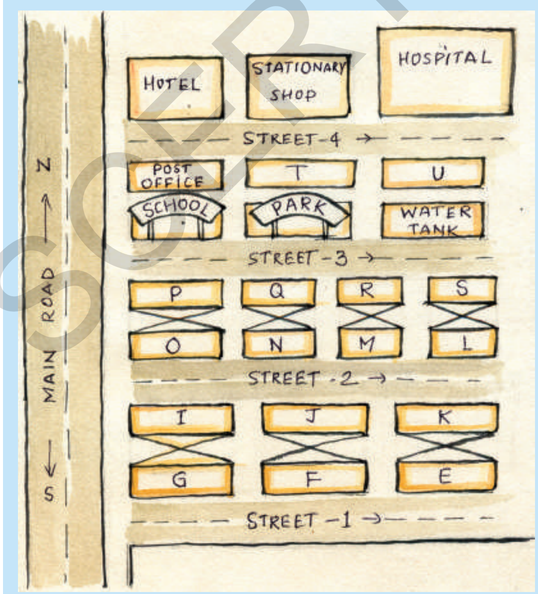
ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವನ್ನು ಎರಡು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎಂಬ ಹೊಸ ಶಾಖೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದೆ. ಫ್ರಾನ್ಸ್‌ಗೆ ಸೇರಿದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಮತ್ತು ಪ್ರಮುಖ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿಯಾದ ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟ್‌ಸ್ (1956-1650) ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತ ಮಿಶ್ರವಾದ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿದರು.

ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ನಾವು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟ್‌ಸ್ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತದ ವಕ್ರಗಳು, ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವಿನ ಕುರಿತು ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ ಕುರಿತು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1



1. ಒಂದು ಆವಾಸ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ ಮುಖ್ಯರಸ್ತೆ ಉತ್ತರ – ದಕ್ಷಿಣ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಇದೆ.



ಅದರ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಮೂರನೇ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿನ ಎಡಭಾಗದ ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲೇನಿದೆ?

(ii) ಎರಡನೇ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ಬಲಗಡೆ ಎರಡನೇ ಮನೆಯ ಹೆಸರೇನು?

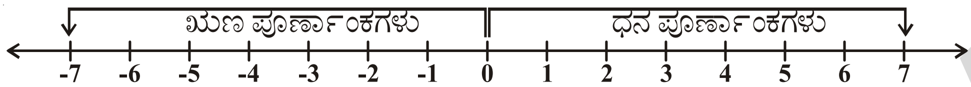
(iii) K ಯವರ ಮನೆ ಯಾವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆಯೋ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(iv) ಅಂಚೆಕಛೇರಿಯ ಸ್ಥಾನ ಎಲ್ಲಿದೆಯೋ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(v) ಆಸ್ಪತ್ರೆಯ ಸ್ಥಳದ ಸ್ಥಾನ ಎಲ್ಲಿದೆಯೋ ವಿವರಿಸಿರಿ.

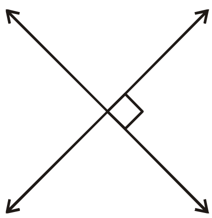
5.2 ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿ :

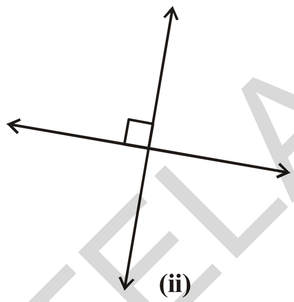
ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

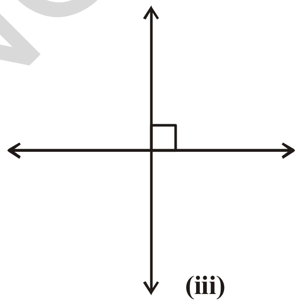


ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಾದ 'O' ಗೆ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳು ಗುರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು 'O' ಯನ್ನು **ಮೂಲಬಿಂದು** ಎನ್ನುವರು. ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸೊನ್ನೆಯ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸೊನ್ನೆಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

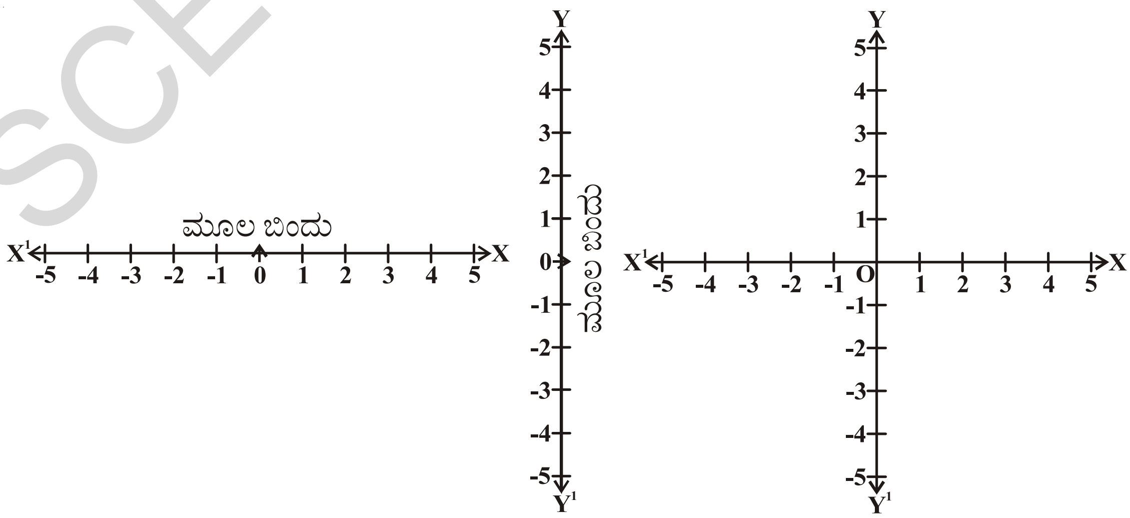
ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಾವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.


(i)

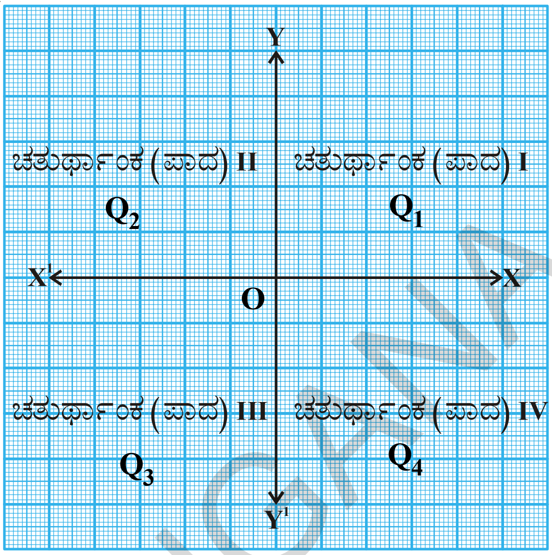

(ii)


(iii)

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖೆಗಳು ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಾದರೂ ಇರಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಚಿತ್ರ (iii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ, ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಕ್ಷಿತಿಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದರೆ ಅವು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಈ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು 'O' ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕ್ಷಿತಿಜ (ಭೂಮಿ) ಸಮನಾಂತರ ರೇಖೆ XX^1 ನ್ನು X- ಅಕ್ಷ ಎಂದು, ಕ್ಷಿತಿಜಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು YY^1 ನ್ನು Y- ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು



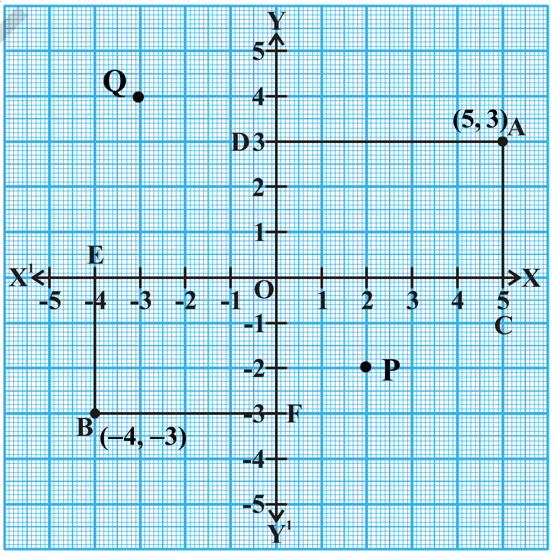
XX^1 ಮತ್ತು YY^1 ಗಳು ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಬಿಂದುವನ್ನು **ಮೂಲಬಿಂದು** ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು 'O' ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. $\overrightarrow{OX}$ ನ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\overrightarrow{OX}$ ನ್ನು X ಧನ ಅಕ್ಷ ಎಂದು, ಹಾಗೆ $\overrightarrow{OY}$ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\overrightarrow{OY}$ ನ್ನು Y ಧನ ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. $\overrightarrow{OX^1}$ ನ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\overrightarrow{OX^1}$ ನ್ನು ಋಣ X ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. $\overrightarrow{OY^1}$ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ OY^1ನ್ನು ಋಣ Y ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ



X^1X ಮತ್ತು Y^1Y ಗಳು ಸಮತಲವನ್ನು 4 ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ. ಆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ಮತ್ತು Q_1, Q_2, Q_3,Q_4 ಗಳಿಂದ ಸೂಸುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೊದಲನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕ , ಎರಡನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕ, ಮೂರನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕ, ನಾಲ್ಕನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮತಲವನ್ನು ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಸಮತಲ (ರೆನೆಡೆಕಾರ್ಟ್ ಹೆಸರಲ್ಲಿ) ಎಂದು ಅಥವಾ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲ ಅಥವಾ XY- ಸಮತಲ ಎಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆ X,Y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ..

5.2.1 ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪನೆ :

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು (ಚಿತ್ರ) ಹೇಗೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಬೇಕೋ ಈಗ ನೋಡೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ X,Y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. A ಮತ್ತು B ಗಳು ಯಾವುದಾದರು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಯಾವ ಚತುರ್ಥಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆಯೋ ಗಮನಿಸಿರಿ.



A ಬಿಂದುವು ಮೊದಲನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕ (Q_1), B ಬಿಂದು ಮೂರನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ (Q_3) ಇವೆ. ಈಗ A,B ಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿವೆಯೋ ನೋಡೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ AC ಲಂಬವನ್ನು ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ AD ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. ಇದೇ ರೀತಿ BE ಮತ್ತು BF ಲಂಬಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ X ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯೋಣ. ಈಗ

(i) ಧನ X ಅಕ್ಷದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 'A' ಬಿಂದುವುನಿಂದ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದೂರ AD=OC= 5 ಪ್ರಮಾಣಗಳು. ಇದನ್ನು X ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಧನ Y ಅಕ್ಷದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 'A' ಬಿಂದುವಿನಿಂದ X ಅಕ್ಷಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದೂರ AC=OD=3 ಪ್ರಮಾಣಗಳು. ಇದನ್ನು Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(5,3)ನ್ನು 'A' ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(iii) ಋಣ X ಅಕ್ಷದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ B ಬಿಂದುವುನಿಂದ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದೂರ OE=BF= 4 ಪ್ರಮಾಣಗಳು. ಇದನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನ X ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(iv) ಋಣ Y- ಅಕ್ಷದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ B ಬಿಂದುವಿನಿಂದ X ಅಕ್ಷಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದೂರ OF = EB = 3 ಪ್ರಮಾಣಗಳು. ಇದನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನ Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(-4, -3)ನ್ನು 'B' ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಲಂಬದೂರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕೋ ಈಗ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬ ಪಾದದವರೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ X-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. X- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವನ್ನು ಪ್ರಥಮ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಎಂದು ಸಹ ಎನ್ನುವರು.

P ಯ x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ =2

Q ನ x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ = –3

(ii) Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬ ಪಾದದವರೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ Y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. Y- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವನ್ನು ದ್ವಿತೀಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಎಂದು ಸಹ ಎನ್ನುವರು.

P ನ y- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ = 3

Q ನ y- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ = -4

ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (2, –2) ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (–3, 4) ಆಗುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

5.2.2 ಮೂಲಬಿಂದು

1. X ಅಕ್ಷ, Y ಅಕ್ಷಗಳ ಛೇದದ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು ಅಥವಾ ಆದಿಬಿಂದು ಎಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಇತರೇ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಅಥವಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು 'O' ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ -1 : (i) P(8,8) (ii) Q (6,–8) ಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ (ಪಾದಸೂಚಕ) ಮತ್ತು y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ (ಲಂಬಸೂಚಕ) ಗಳನ್ನು ಬರೆದು, ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : (i) P (8,8)

x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ(ಪ್ರಥಮ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ) = y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ (ದ್ವಿತೀಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ) = 8

P ಬಿಂದು X ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 8 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಧನದಿಶೆಯಲ್ಲಿ X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 8 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

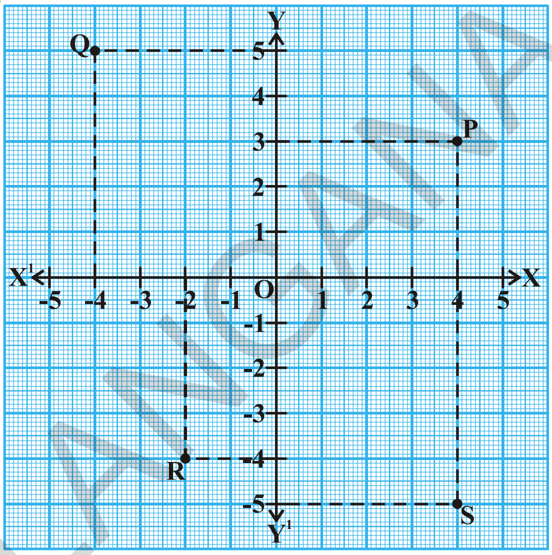
(ii) Q (6, –8)

x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ = 6 ; y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ = –8

Q ಬಿಂದು X- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಧನ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 6 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು Y-ಅಕ್ಷ ಋಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 8 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ -2 : ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : 1. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಲಂಬರೇಖೆ X ಅಕ್ಷವನ್ನು 4 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿ ಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ P ಯ X ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 4. ಅದೇರೀತಿ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಲಂಬರೇಖೆ Y ಅಕ್ಷವನ್ನು 3 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ P ಯ Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 3. ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (4, 3).

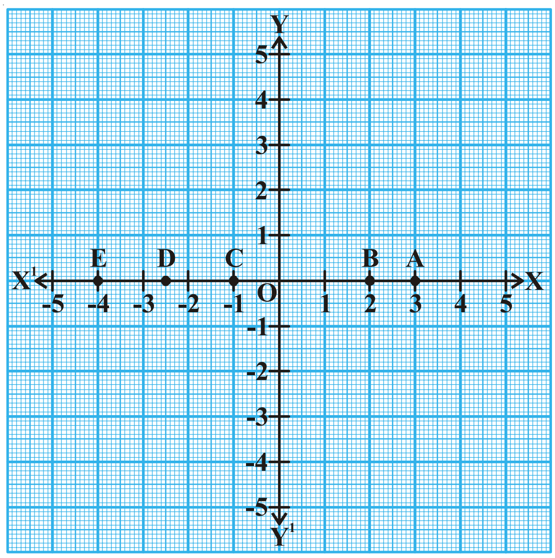


2. ಇದೇ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ Q ಬಿಂದುವಿನ X- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ -4 ಮತ್ತು Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 5. Qಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಗಳು (–4, 5).

3. R ಬಿಂದುವಿನ X ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ –2 ಮತ್ತು Yನಿರ್ದೇಶಾಂಕ –4 . R ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (–2, –4).

4. S ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (4, –5).

ಉದಾಹರಣೆ -3 : ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : A ಬಿಂದು Y- ಅಕ್ಷದಿಂದ 3 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು X- ಅಕ್ಷದಿಂದ 0 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A ಯ X- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 3 ಮತ್ತು Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 0. A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (3,0) ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ.

(i) B ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (2,0) ಏಕೆ?

(ii) C ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (-1,0) ಏಕೆ?

(iii) D ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (-2.5,0) ಏಕೆ?

(iv) E ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (-4,0) ಏಕೆ?

ಮೇಲಿನ ಗ್ರಾಫ್‌ನಿಂದ X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದು X-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಸೊನ್ನೆ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ y- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು 0.

X- ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ $y = 0$ ದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ :

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇವೆ. ಅದನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

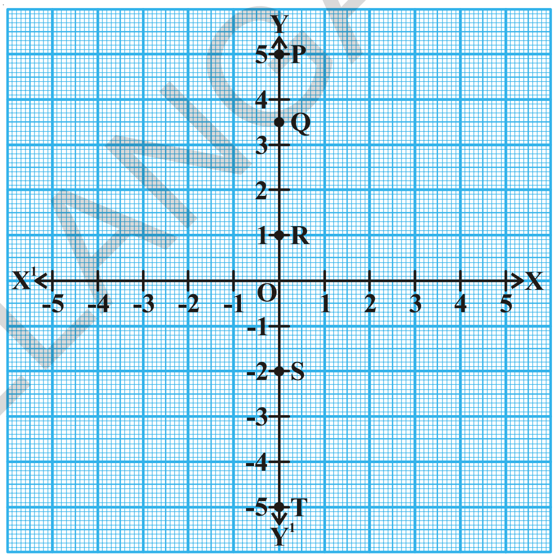
(i)	(0,5)	(ii)	(0,0)	(iii)	(3,0)
(iv)	(-5,0)	(v)	(-2,-3)	(vi)	(-6,0)
(vii)	(0,6)	(viii)	(0,a)	(ix)	(b,0)

ಉದಾಹರಣೆ -4 : ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

(i) P ಬಿಂದುವು Y- ಅಕ್ಷದಿಂದ ಸೊನ್ನೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಯ x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 0. P ಬಿಂದು X- ಅಕ್ಷದಿಂದ 5 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಯ y- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 5.

ಆದ್ದರಿಂದ P ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0,5).



ಆಲೋಚಿಸಿ , ಚರ್ಚಿಸಿ :

(ii) Q ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, 3.5), ಏಕೆ ?

(iii) R ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, 1), ಏಕೆ ?

(iv) R ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, -2), ಏಕೆ ?

(v) T ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, -5), ಏಕೆ ?

Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದು Y- ಅಕ್ಷದಿಂದ 0 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸೊನ್ನೆ.

Y- ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ X= 0 ದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

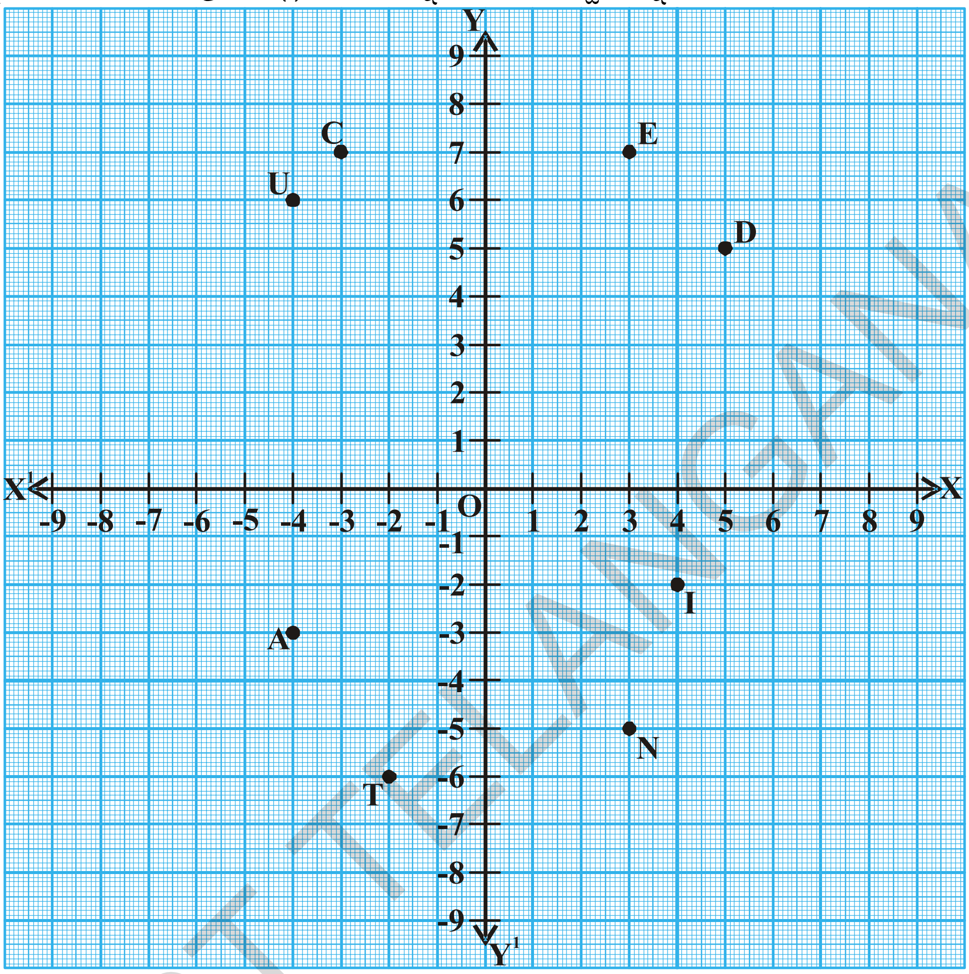
5.2.3 ಮೂಲ ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು :

'O' ಬಿಂದು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದು 'O' ಯ x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸೊನ್ನೆ. ಅದೇ ರೀತಿ 'O' ಬಿಂದು X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಹ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದು y- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸೊನ್ನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0,0)ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

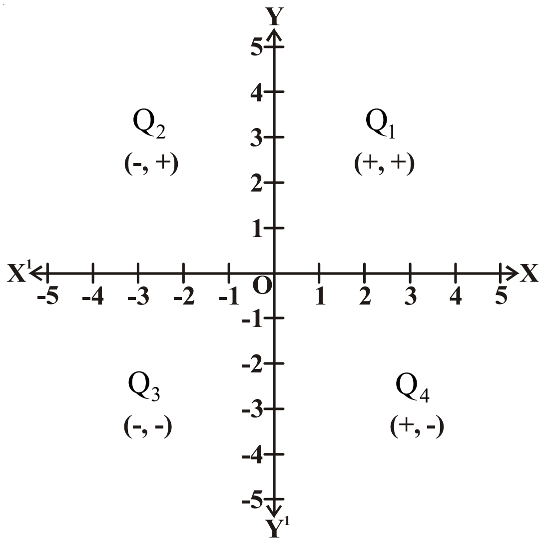
1. (0, x) (0, y) (0,2) ಮತ್ತು (0,–5) ಗಳ ಯಾವ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ? ಏಕೆ ?
2. X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

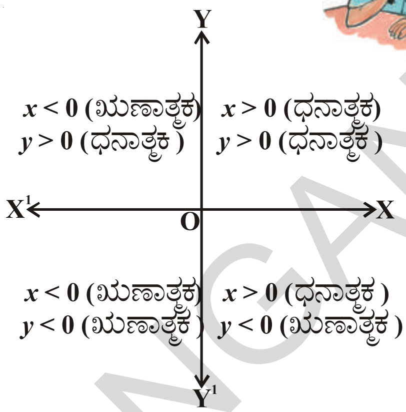
ಉದಾಹರಣೆ - 5 : ಕೆಳಗಿನ ಗ್ರಾಫ್‌ನಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಚಿಸಿ.



ಬಿಂದು	ಪಾದಸೂಚಕ	ಲಂಬ ಸೂಚಕ	ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು	ಚತುರ್ಥಾಂಕ	ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ಗುರ್ತುಗಳು
E	3	7	E (3,7)	Q_1	(+, +)
D	.....	.....	.....	.....	.....
U	–4	6	U (–4,6)	.....	(–,+)
C	.....	.....	.....	.....	.....
A	–4	–3	A (–4, –3)	.....	(–,–)
T	.....	.....	.....	.....	.....
I	4	–2	I (4, –2)	.....	(+,–)
O	.....	.....	.....	.....	.....
N	.....	.....	.....	.....	.....

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಆ ಬಿಂದು ಇರುವ ಪಾದಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.



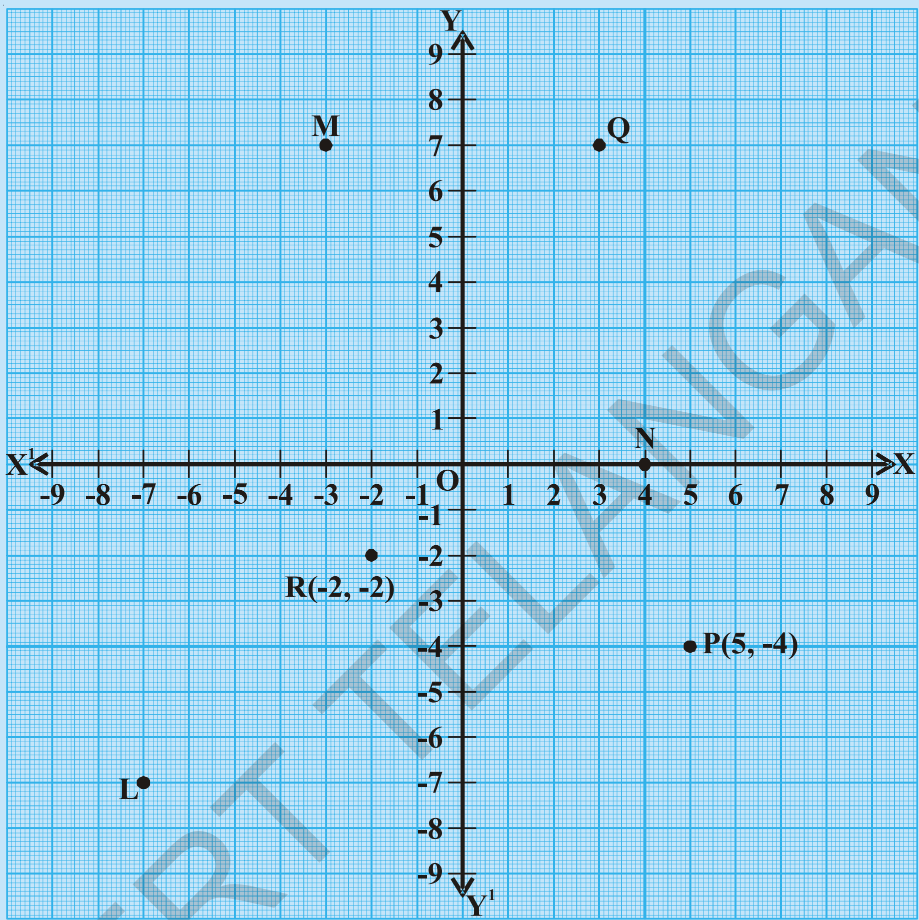


ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿರುವ ಚತುರ್ಥಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ
   i) (–2, 3) ii) (5, –3) iii) (4, 2) iv) (–7, –6)
   v) (0, 8) vi) (3, 0) vii) (–4, 0) viii) (0, –6)
2. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ x ನಿರ್ದೇಶಾಂಖಗಳು ಮತ್ತು y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   i) (4, –8) ii) (–5, 3) iii) (0, 0) iv) (5, 0)
   v) (0, –8)
3. ಕೆಳಗಿನ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ? ಅವು ಯಾವ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ?
   i) (–5, –8) ii) (0, 13) iii) (4, –2) iv) (–2, 0)
   v) (0, –8) vi) (7, 0) vii) (0, 0)
4. ಕೆಳಗಿನ ಗ್ರಾಫ್‌ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   i) L ನ Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ
   ii) Q ನ Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ
   iii) (-2,-2) ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವದು
   iv) (5,-4) ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವದು

v) N ಬಿಂದುವಿನ x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ

vi) Mಬಿಂದುವಿನ x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ



5. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ, ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

i. ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿತಿಜ (ಭೂಮಿಗೆ) ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು Y- ಅಕ್ಷ ಎನ್ನುವರು.

ii. ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು Y- ಅಕ್ಷ ಎನ್ನುವರು.

iii. ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮೂಲಬಿಂದು

iv. (2, −3) ಬಿಂದು ಮೂರನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

v. (−5, −8) ಬಿಂದು ನಾಲ್ಕನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

vi. $x < 0$, $y < 0$ ಆದರೆ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಒಂದನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. $(-x , -y)$

6. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ(ಅಣಿತಯುಗ್ಮ)ಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i.. (1, 0), (3 , 0), (−2 , 0), (−5, 0), (0, 0), (5, 0), (−6, 0)

ii. (0, 1), (0 , 3), (0 , −2), (0, −5), (0, 0), (0, 5), (0, −6)

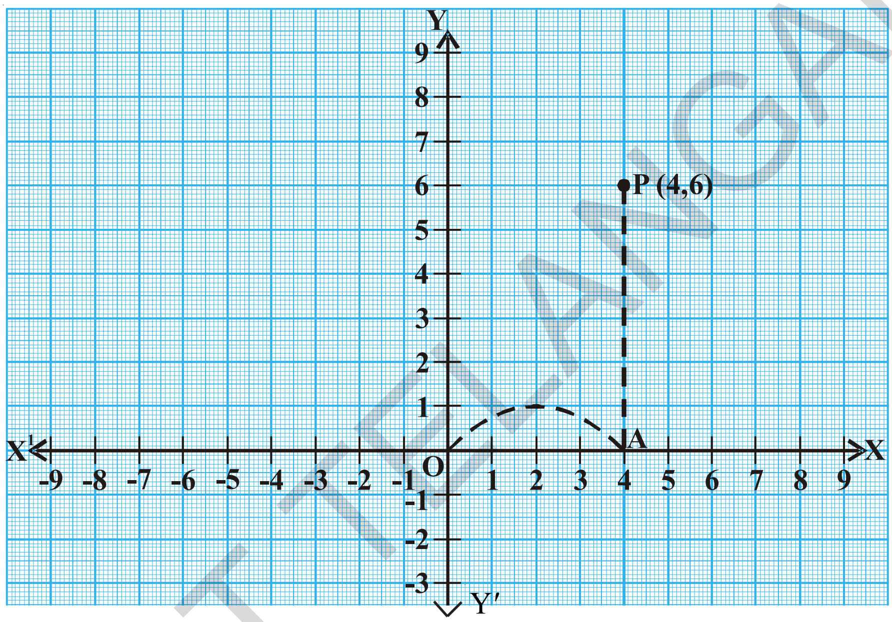
5.3 ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು.

ಇದುವರೆಗೂ ನಾವು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಇದ್ದ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕೋ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಅವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಬೇಕೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

P (4, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಬೇಕೋ ನೋಡೋಣ.

P ಬಿಂದು ಯಾವ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇದೆಯೋ ಊಹಿಸು.

Pಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 4 ಮತ್ತು y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 6



∴ P ಮೊದಲನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು.

P (4, 6) ಬಿಂದುವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು.

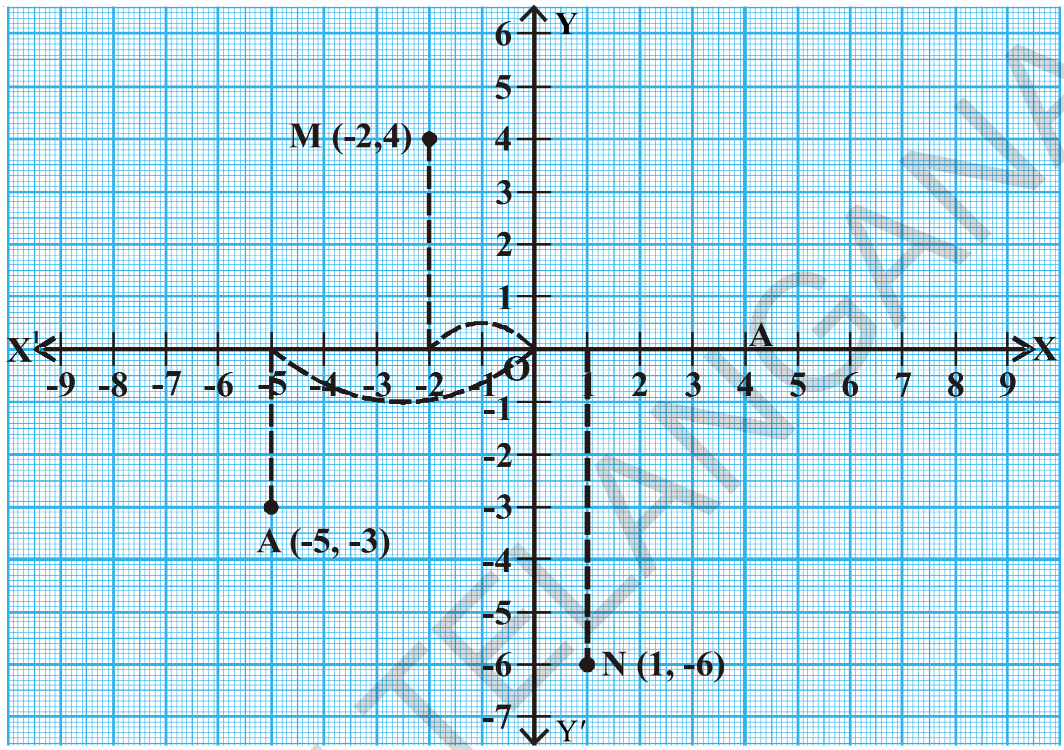
- ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು X-ಅಕ್ಷ ಎಂದು , ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು Y- ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ. ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು 'O' ಯಾಗಿ ತೋರಿಸಿ.
- X,Y ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- X- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ.
- X-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 4ರ ಚಿಹ್ನೆ + ಆದ್ದರಿಂದ ಧನ X- ಅಕ್ಷದ ಕಡೆಗೂ, 'O'ಗೆ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೂ 4 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಹತ್ತಿರ A ವರೆಗೆ ಚಲಿಸಿರಿ.
- Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 6 ರ ಚಿಹ್ನೆ + ಆದ್ದರಿಂದ, Aಯಿಂದ ಧನ Y- ಅಕ್ಷದ ಕಡೆಗೂ 'O' ಯಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ 6 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದವರೆಗೂ ಹೋಗಿರಿ.
- ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು 'P' (4, 6) ಆಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿ ಕಾರ್ಟಿಷಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದನ್ನು **ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪನೆ** ಎಂದು ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆ -7 : ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಟಿಷಿಯನ್ ಸಮತಲ (ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲ)ದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಿ.

(i) M (–2, 4), (ii) A (–5, -3), (iii) N (1, –6)

ಸಾಧನೆ : ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ X-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



(i) M (–2,4)ಬಿಂದು ಯಾವ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೋ ಊಹಿಸಿರಿ.

$x < 0, y > 0$ ಆದ್ದರಿಂದ M ಎರಡನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸೋಣ.

M (–2,4) ಆದ್ದರಿಂದ 0 ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ X-ಅಕ್ಷದ ಋಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 2 ರ ವರೆಗೆ ಹೋಗಿ.

ಅಲ್ಲಿಂದ ಧನ Y- ಅಕ್ಷದ ಕಡೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ 4 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವರೆಗೆ ಹೋಗಿ ನಿಲ್ಲಿರಿ.

(ii) A (–5, –3) :

ಈ ಬಿಂದುವು ಮೂರನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದು 0 ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿರಿ. X-ಅಕ್ಷದ ಋಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ -5 ವರೆಗೆ ಹೋಗಿ ನಿಲ್ಲಿರಿ.

ಅಲ್ಲಿಂದ ಋಣ Y- ಅಕ್ಷದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಕೆಳಗಡೆ 3 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದ ವರೆಗೆ ಹೋಗಿ ನಿಲ್ಲಿರಿ. ಇದುವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಂದು (–5, –3)

(iii) N (1, –6): ಈ ಬಿಂದು ಯಾವ ಚತುರ್ಥಾಂಕದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ?

ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ X- ಅಕ್ಷದ ಧನ'ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 1 ಪ್ರಮಾಣ ದೂರದವರೆಗೆ ಹೋಗಿ ನಿಲ್ಲಿರಿ. ಅಲ್ಲಿಂದ ಋಣ Y- ಅಕ್ಷದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಡೆ 6 ಯೂನಿಟ್ (ಪ್ರಮಾಣ) ಗಳ ದೂರದವರೆಗೆ ಹೋಗಿ ನಿಲ್ಲಿರಿ. ಇದುವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವು N (1, –6).

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ.

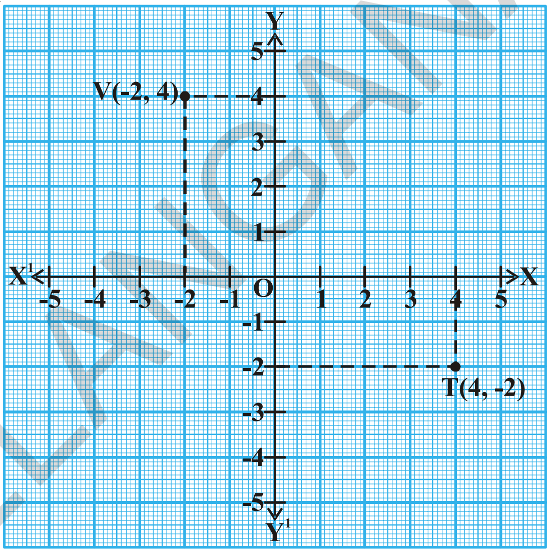
1. B (–2, 3) 2. L (5, –8) 3. U (6, 4) 4. E (–3, –3)

ಉದಾಹರಣೆ 8 : T(4, –2) ಮತ್ತು V(–2, 4) ಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಟೀಜಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ T(4, –2) ಮತ್ತು V(–2, 4) ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

(4, –2) ಮತ್ತು (–2, 4) ಗಳು ಒಂದೇ? ವಿಭಿನ್ನವೇ? ಆಲೋಚಿಸಿ.

P (8, 3), Q(3, 8) ಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್‌ನಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. A (4, –5), ಮತ್ತು B(–5 , 4) ಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್‌ನಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ (x, y) ಬಿಂದು (y, x) ಬಿಂದುಗಳ ವಿಭಿನ್ನಗಳೇ? ಅಲ್ಲವೇ? ನಿರ್ಧರಿಸಿ,



ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು (y, x) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ವಿಭಿನ್ನಗಳೆಂದು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

(x, y) ನಲ್ಲಿ x, y ಗಳ ಕ್ರಮ ಮುಖ್ಯವಾದದ್ದು, ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ (x, y) ನ್ನು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಅಥವಾ ಅಣಿತಯುಗ್ಮ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು.

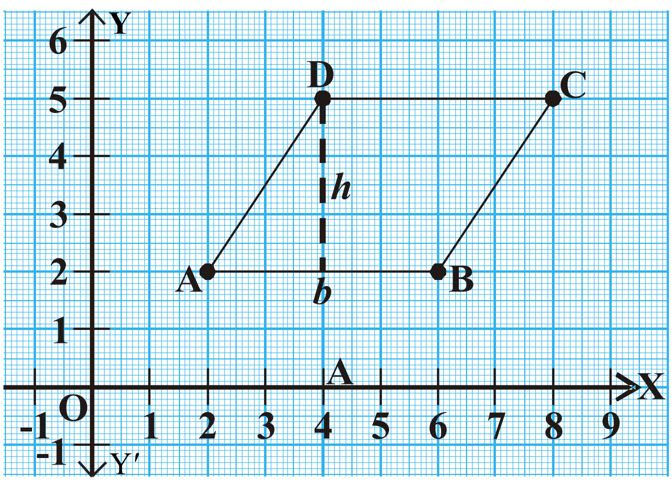
$x \neq y$ ಆದರೆ $(x, y) \neq (y, x)$.

ಆದರೆ $x = y$ ಆದರೆ $(x, y) = (y, x)$ ಆಗುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ 9 : ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ A(2, 2), B(6, 2), C (8, 5) ಮತ್ತು D (4, 5) ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವರಸೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಸೇರಿಸಿ. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು Q_1 ನಲ್ಲಿ ಇರುವವು.

ಗ್ರಾಫ್‌ನಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹು b = AB = 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ h = 3 ಸೆಂ.ಮೀ.



ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಭೂಮಿ (ಪಾದ) × ಎತ್ತರ

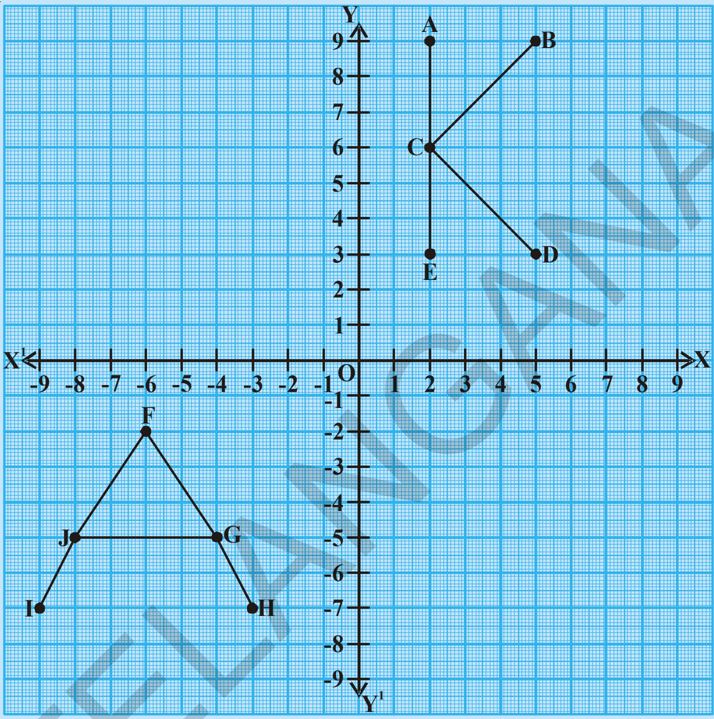
= bh

= 4× 3 = 12 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

(i) A, B, C, D, E. ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) F, G, H, I, J. ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (ಅಣಿತಯುಗ್ಮ) ಗಳಾಗಿ ಬರೆದು ಕಾರ್ಟೆಷಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ.

x	2	3	–1	0	–9	–4
y	–3	–3	4	11	0	–6
(x, y)						

2. (5, –8) ಮತ್ತು (–8, 5) ಗಳು ಒಂದೇ ಅಥವಾ ವಿಭಿನ್ನಗಳೇ ?

3. (1, 2), (1, 3), (1, –4), (1, 0), ಮತ್ತು (1, 8).ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಇವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

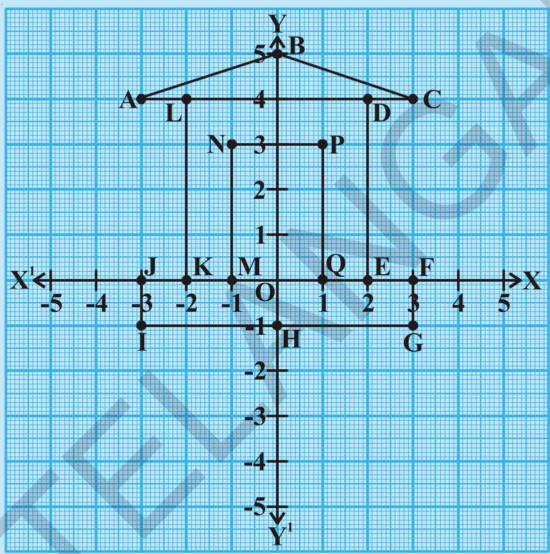
4. (5, 4), (8, 4), (3, 4), (0, 4), (–4, 4), (–2, 4) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ. ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.

5. (0, 0) (0, 3) (4, 3) (4, 0) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್‌ನಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. (2, 3), (6, 3) ಮತ್ತು (4, 7) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 5 ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಆರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.
ಉದಾ : (–2, 7) (1, 4) ....

8. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಚಿತ್ರದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳು A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, L, M. N, P, O ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



9. ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿ. ಅವನ್ನು ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿ.

i. (2, 5), (4, 7) ii. (–3, 5), (–1, 7)

iii. (–3, –4), (2, –4) iv. (–3, –5), (2, –5)

v. (4, –2), (4, –3) vi. (–2, 4), (–2, 3)

vii. (–2, 1), (–2, 0)

ಅದೇ ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿ.

viii. (–3, 5), (–3, 4) ix. (2, 5), (2, –4)

x. (2, –4), (4, –2) xi. (2, –4), (4, –3)

xii. (4, -2), (4, 7) xiii. (4, 7), (–1, 7)

xiv. (–3, 2), (2, 2)

ಈಗ ನೀವೊಂದು ಆಶ್ಚರ್ಯಕರ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಅದೇನು?

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಗ್ಲೋಬಿನ ಮೇಲಿರುವ ಅಕ್ಷಾಂಶ -ರೇಖಾಂಶಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿ ಹೈದರಾಬಾದ್, ನ್ಯೂಡಿಲ್ಲಿ, ಚೆನ್ನೈ ಮತ್ತು ವಿಶಾಖಪಟ್ಟಣ ನಗರಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿ. ಅವನ್ನು ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿ.

(1, 0) (0.9) ; (2, 0) (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);

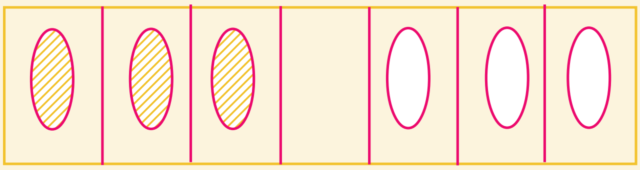
(5, 0) (0.5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2) ; (9, 0) (0, 1).

ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ನಮಗೆ ಎರಡು ಆಧಾರಗಳು ಬೇಕು.
- ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಅಥವಾ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಎರಡು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಗಳು ಬೇಕು. ಅದರಲ್ಲೊಂದು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆ (X-ಅಕ್ಷ) ಮತ್ತೊಂದು ಲಂಬರೇಖೆ (Y-ಅಕ್ಷ).
- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ರೆನಡಾ ಕಾರ್ಟಸ್ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ.
- ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು ಎನ್ನುವರು.
- ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (x, y) ಎಂಬುದು (y, x) ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಕ್ಕೆ ವಿಭಿನ್ನವಾದದ್ದು.
- X-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y = 0$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.
- Y-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x = 0$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ನಿಮಗೊಂದು ಪಜಿಲ್ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ.



ಮೆದುಳಿಗೆ ಕಸರತ್ತು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸರಿಸಿ ಬಿಳಿ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕಪ್ಪು ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳೊಂದಿಗೆ ಬದಲಾಗಬೇಕು. (1) ಒಂದೇ ಬಣ್ಣದ ಕಾರ್ಡುಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಹಾದುಹೋಗುವಂತಿಲ್ಲ, (2) ಒಮ್ಮೆಗೆ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ಒಂದೇ ಚೌಕಕ್ಕೆ ಜರುಗಿಸಬಹುದು. ಈ ಪಜಿಲ್‌ನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಚಲಿಸಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಟ ಚಲನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕನಿಷ್ಠ ಚಲನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸುಮಾರು 15-20 ಆಗಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಆಡಬಲ್ಲೆಯಾ? ಆಟವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕವಾಗಿಸಲು ಕಾರ್ಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ.

06

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

6.1 ಪರಿಚಯ

ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

(i) ಐದು ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 60 ಆದರೆ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 7 ನ್ನು ಸೇರಿಸದರೆ ಫಲಿತಾಂಶ 51 ಬರುವುದು. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂಧರ್ಭ (i) ರಲ್ಲಿ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯದು. ಸಂದರ್ಭ (ii) ರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟೋ ತಿಳಿಯದು. ಹೀಗಿರುವಾಗ ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಸಾಧಿಸಬಲ್ಲೆವು? ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲಿ ತಿಳಿಯದ ರಾಶಿಗಳನ್ನು x, y ಅಥವಾ z ಗಳಿಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಂದರ್ಭ (i) ಕ್ಕೆ.

$5 \times$ ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ = 60 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹ y ಅಂದುಕೊಂಡರೆ

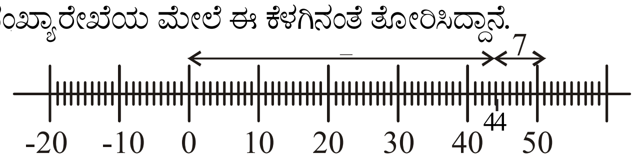
ಆಗ, $5 \times y = 60$ ಅಥವಾ $5y = 60$ ಆಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದುರ ಮೂಲಕ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

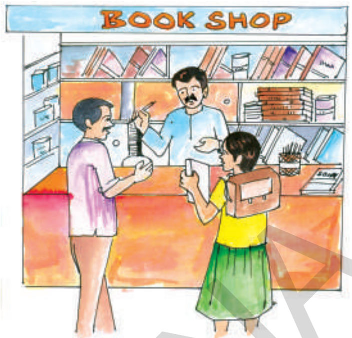
ಇದೇ ರೀತಿ ಸಂದರ್ಭ (ii) ಕ್ಕೆ ಸಹ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿ ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$x + 3 = 0$, $x + \sqrt{3} = 0$ ಮತ್ತು $\sqrt{2}x + 5 = 0$ ಗಳಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಇಂತಹ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಮೂಲ ಅಥವಾ ಪರಿಹಾರ (Solution)ವಾಗಿರುತ್ತದೆಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಈ ಮೂಲವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನೀವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರುವಿರಿ.

ಆತಿಫ್ ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭ (ii) ರ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೋರಿಸಿದ್ದಾನೆ.



6.2 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು



ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ:

ಕಾವ್ಯ ತನ್ನ ತಂದೆಯ ಜೊತೆ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋಗಿ 4 ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು 2 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಳು. ಅವರ ತಂದೆ ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ₹ 100 ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ.

ಕಾವ್ಯಳಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ, ಒಂದೊಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ತಿಳಿಯದು. ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ನೀವು ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲಿರಾ?

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಒಂದೊಂದು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ, ಒಂದೊಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಸಹ ತಿಳಿಯದು. ಅಂದರೆ ಎರಡು ತಿಳಿಯದ ರಾಶಿಗಳು ಇವೆ. ಇವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ ಒಂದೊಂದು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ₹ x ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹ y ಅಂದುಕೊಂಡರೆ ಮೇಲಿನ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು

ಸಮೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ $4x + 2y = 100$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಘಾತ ಸೂಚಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದಾರಾ?

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ 'x' 'y' ಚರ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ $4x + 2y = 100$ ಎಂಬುದು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು 'x' ಮತ್ತು 'y' ಗಳಿಂದ ತೋರಿಸುವುದು. ಸರ್ವೆಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದ್ದರೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸಹ ಬಳಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$p + 3q = 50$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v = \sqrt{11}$, $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} = 5$ ಮತ್ತು $3 = \sqrt{5}x - 7y$ ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಹ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಇದೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$p + 3q - 50 = 0$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v - \sqrt{11} = 0$, $3s - 2t - 30 = 0$ ಮತ್ತು $\sqrt{5}x - 7y - 3 = 0$

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ $ax + by + c = 0$. a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a, b ಗಳೆರಡೂ ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಲಾರವು.

ಉದಾಹರಣೆ1: ಸಚಿನ್ ಮತ್ತು ಸೆಹ್ವಾಗ್ ಸೇರಿ 137 ರನ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರು. ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ..

ಪರಿಹಾರ : ಸಚಿನ್ ಮಾಡಿದ ರನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ‘x’ ಮತ್ತು ಸೆಹ್ವಾಗ್ ಮಾಡಿದ ರನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ‘y’ ಅಂದುಕೊಂಡರೆ, ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಮೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ $x + y = 137$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಹೇಮಳ ವಯಸ್ಸು, ಮೇರಿ ವಯಸ್ಸಿಗೆ 4 ರಷ್ಟು, ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಹೇಮಳ ವಯಸ್ಸು ‘x’ ವರ್ಷಗಳೆಂದು, ಮೇರಿ ವಯಸ್ಸು ‘y’ ವರ್ಷಗಳು ಆಗಿರಲಿ,

ಹಾಗಾದರೆ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ ಹೇಮ ವಯಸ್ಸು = ಮೇರಿಯ ವಯಸ್ಸಿಗೆ 4 ರಷ್ಟು

ಅಂದರೆ $x = 4y$

$\Rightarrow x - 4y = 0$ (ಹೇಗೆ?) ಇದು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ, ಅದರಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಲಾಗಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 27 ಹೆಚ್ಚು. ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿ, ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ x ಮತ್ತು y ಎಂದುಕೊಂಡು, ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆ x ಮತ್ತು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆ y ಅಂದುಕೊಂಡರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ $10y + x$

ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಲಾಗಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $10x + y$ (ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.).

ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ

(ಸಂಖ್ಯೆ) – (ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಲು ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ) = 27.

i.e., $10y + x - (10x + y) = 27$

$\Rightarrow 10y + x - 10x - y - 27 = 0$

$\Rightarrow 9y - 9x - 27 = 0$

$\Rightarrow y - x - 3 = 0$

$\Rightarrow$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ, $x - y + 3 = 0$

ಉದಾಹರಣೆ 4. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು a, b ಮತ್ತು c ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $3x + 4y = 5$ ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$

iii) $3x = y$ iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$

v) $3x - 7 = 0$

ಪರಿಹಾರ : (i) $3x + 4y = 5$ ನ್ನು

$3x + 4y - 5 = 0$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ $a = 3$, $b = 4$ ಮತ್ತು $c = -5$.

(ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$ ನ್ನು

$1.x - \sqrt{3}y - 5 = 0$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ $a = 1, b = -\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $c = -5$.

(iii) ಸಮೀಕರಣ $3x = y$ ನ್ನು

$3x - y + 0 = 0$. ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹದು.

ಇಲ್ಲಿ $a = 3, b = -1$ ಮತ್ತು $c = 0$.

(iv) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$ ನ್ನು

$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{6} = 0$;

ಇಲ್ಲಿ $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $c = \frac{-1}{6}$

(v) $3x - 7 = 0$ ನ್ನು

$3x + 0.y - 7 = 0$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$a = 3, b = 0; c = -7$

ಉದಾಹರಣೆ-5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax + by + c = 0$ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ a, b ಮತ್ತು c ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $x = -5$

ii) $y = 2$

iii) $2x = 3$

iv) $5y = -3$

ಪರಿಹಾರ :

ಕ್ರ.ಸಂ.	ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ	$ax + by + c = 0$ ರೂಪ	a, b, c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು		
			a	b	c
1	$x = -5$	$1.x + 0.y + 5 = 0$	1	0	5
2	$y = 2$	$0.x + 1.y - 2 = 0$	0	1	–2
3	$2x = 3$	---	---	---	---
4	$5y = -3$	----	----	---	---

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ a, b, ಮತ್ತು c ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   i) $3x + 2y = 9$ ii) $-2x + 3y = 6$ iii) $9x - 5y = 10$

   iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0$ v) $2x = y$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $ax+by+c=0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು a, b ಮತ್ತು c ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) $8x + 5y - 3 = 0$ ii) $28x - 35y = -7$ iii) $93x = 12 - 15y$

   iv) $2x = -5y$ v) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$ vi) $y = \frac{-3}{2}x$

   vii) $3x + 5y = 12$

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು a, b ಮತ್ತು c ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   i) $2x = 5$ ii) $y - 2 = 0$ iii) $\frac{y}{7} = 3$ iv) $x = \frac{-14}{13}$

3. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 34.

   (ii) ಒಂದು ಬಾಲ್ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ, ಇಂಕ್‌ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ₹ 5 ಕಡಿಮೆ.

   (iii) ಭಾರ್ಗವಿಗೆ ಬಂದ ಅಂಕಗಳು, ಸಿಂಧು ಅಂಕಗಳ ಎರಡರಷ್ಟಿಕ್ಕಿಂತ 10 ಕಡಿಮೆ.

   (iv) ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಬೆಲೆ ₹ 2 ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಲ್‌ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹ 15 ಶೀಲಾ ಕೆಲವು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು, ಕೆಲವು ಬಾಲ್‌ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡು ₹ 100 ಗಳನ್ನು ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಳೆ.

   (v) ಯಾಮಿನಿ, ಫಾತಿಮಾ IX ತರಗತಿ ಓದುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಇವರಿಬ್ಬರು ಸೇರಿ ಪ್ರಧಾನ ಮಂತ್ರಿ ಸಹಾಯ ನಿಧಿಗೆ ₹ 200/- ಗಳನ್ನು ದೇಣಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

   (vi) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ, ಅದರಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 121. (ಸೂಚನೆ : ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆ 'x' ಮತ್ತು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆ 'y' ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

6.3 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡುಸುವ ವಿಧಾನಗಳು

$3x - 4 = 8$ ಗಳಂತಹ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲ ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. $3x - 4 = 8$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಏನು?

$3x - 2y = 5$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೂಲವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವು? ಮೂಲಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆಯೇ? ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆಯೇ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$x = 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ!

$x = 3$ ನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ.

$$3(3) - 2y = 5$$

$$9 - 2y = 5$$

ಆದರೆ yನ' ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ ತೃಪ್ತಿಹೊಂದುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಲಾರೆವು. ಅಂದರೆ ಇದುವರೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾರೆವು. 'x' ಬೆಲೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ 'y' ಬೆಲೆ ಯೂ ಸಹ ತಿಳಿದಾಗಲೇ ಅದು ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. 'y'ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ $9 - 2y = 5$ ರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. $9 - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4$ ಅಥವಾ $y = 2$.

ಅಂದರೆ $3x - 2y = 5$, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ ಬೆಲೆಗಳು $x = 3$ ಮತ್ತು $y = 2$. ಅಂದರೆ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸಲು 'x' ಗೆ ಒಂದು ಬೆಲೆ y ಗೆ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಒಟ್ಟು ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ಅವಶ್ಯಕ.

ಈ ರೀತಿ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ 'x' ಮತ್ತು 'y' ಬೆಲೆಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಅವುಗಳ ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$3x - 2y = 5$ ರ ಮೂಲ $x = 4$ ಮತ್ತು $y = 2$ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು $(3, 2)$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೆವೆ. ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವಾಗ ಮೊದಲು 'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಂತರ 'y' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಇತರೆ ಮೂಲ ಯಾವುದಾದರೂ ಇದೆಯಾ? ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x = 4$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನು $3x - 2y = 5$ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು $12 - 2y = 5$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ 'y'. ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = \frac{12-5}{2} = \frac{7}{2},$$ ಆದ್ದರಿಂದ $\left(4, \frac{7}{2}\right)$ ಸಹ $3x - 2y = 5$ ಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಮೂಲ ಆಗುತ್ತದೆ.

ನೀವು ಮತ್ತೇ ಕೆಲವು ಮೂಲ(ಪರಿಹಾರ)ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ? $(1, -1)$ ರಿಂದ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ. ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಮೂಲಗಳು ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಲ್ಲೆವು.

ಸೂಚನೆ : ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಲಿ $x = 0$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, 'y' ಬೆಲೆಯನ್ನು, $y = 0$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ, 'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ 5 ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 6. $4x + y = 9$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ 4 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿನ ಖಾಲೀ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ)

ಪರಿಹಾರ :

ಕ್ರ.ಸಂ..	x ಅಥವಾ y ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಆದೇಶಿಸಿದ ಬೆಲೆ	ಎರಡನೇ ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆ		ಪರಿಹಾರ
1.	$x = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 0 + y = 9$ $\Rightarrow y = 9$	$(0,9)$
2.	$y = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4x + 0 = 9$ $\Rightarrow 4x = 9$ $\Rightarrow x = 9/4$	$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$
3.	$x = 1$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 1 + y = 9$ $\Rightarrow 4 + y = 9$ $\Rightarrow y = 5$	——
4.	$x = -1$		———	$(-1, 13)$

$\therefore$ $(0, 9)$, $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $(1, 5)$ ಮತ್ತು $(-1, 13)$ ಗಳು ಕೆಲವು ಮೂಲಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ -7. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು $x + 2y = 4$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ. (ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಖಾಲೀಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ)

i) $(0, 2)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

v) $(1, 1)$ vi) $(-2, 3)$

ಪರಿಹಾರ : ಒಂದು ಜೊತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ LHS = RHS ಆದರೆ ಆ ಜೊತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ $x + 2y = 4$

ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ	ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಜೊತೆಗಳು	**LHS** ನ ಬೆಲೆ	**RHS** ನ ಬೆಲೆ	**LHS, RHS** ಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಬಂಧ	ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೆ/ ಮೂಲ ಅಲ್ಲ
1.	$(0, 2)$	$x + 2y = 0 + (2 \times 2)$ $= 0 + 4 = 4$	4	$\therefore$ LHS=RHS	$(0, 2)$ ಮೂಲ ವಾಗುವುದು
2.	$(2, 0)$	$x + 2y = 2 + (2 \times 0)$ $= 2 + 0 = 2$	4	......	$(2, 0)$ ಮೂಲ ಅಲ್ಲ
3.	$(4, 0)$	$x + 2y = 4 + (2 \times 0)$ $= 4 + 0 = 4$	4	LHS = RHS	___
4.	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$	$x + 2y = \sqrt{2} + 2(-3\sqrt{2})$ $= \sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $= -5\sqrt{2}$	___	LHS $\neq$ RHS	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ ಮೂಲ ಅಲ್ಲ
5.	$(1, 1)$	___	4	LHS $\neq$ RHS	$(1, 1)$ ಮೂಲ ಅಲ್ಲ
6.	___	$x + 2y = -2 + (2 \times 3)$ $= -2 + 6 = 4$	4	LHS = RHS	$(-2, 3)$ ಮೂಲವಾಗುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ- 8. $5x - 7y = k$ ಗೆ $x = 3, y = 2$ ಮೂಲಗಳಾದರೆ k ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. k ಬೆಲೆಯಿಂದ ಬರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x = 3, y = 2$ ಪರಿಹಾರ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ

$5x - 7y = k$ ಆಗ $5 \times 3 - 7 \times 2 = k$

$$\Rightarrow 15 - 14 = k$$

$$\Rightarrow 1 = k$$

$$\therefore k = 1$$

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ $5x - 7y = 1$.

ಉದಾಹರಣೆ 9. $5x + 3y - 7 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $x = 2k + 1$ ಮತ್ತು $y = k$ ಆದರೆ k ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಸಾಧನೆ : $5x + 3y - 7 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $x = 2k + 1$ ಮತ್ತು $y = k$ ಬೆಲೆಗಳು ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\Rightarrow 5(2k + 1) + 3k - 7 = 0$

$\Rightarrow 10k + 5 + 3k - 7 = 0$

$\Rightarrow 13k - 2 = 0$ (ಇದು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ).

$\Rightarrow 13k = 2$

$$\therefore k = \frac{2}{13}$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   i) $3x + 4y = 7$ ii) $y = 6x$ iii) $2x - y = 7$
   iv) $13x - 12y = 25$ v) $10x + 11y = 21$ vi) $x + y = 0$
2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ (0, a) ಮತ್ತು (b, 0) ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   i) $8x - y = 34$ ii) $3x = 7y - 21$ iii) $5x - 2y + 3 = 0$
3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು $2x - 5y = 10$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳಾಗುತ್ತವೆ?
   i) (0, 2) ii) (0, –2) iii) (5, 0) iv) $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ v) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
4. $2x + 3y = k$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $x = 2, y = 1$ ಮೂಲಗಳಾದರೆ k ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಬಂದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮತ್ತೆರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $3x - 2y + 6 = 0$ ಗೆ $x = 2 - \alpha$ ಮತ್ತು $y = 2 + \alpha$,ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಾದರೆ 'α 'ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.. ಬಂದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ 3 ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $3x + ay = 6$ ಕ್ಕೆ $x = 1, y = 1$ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಾದರೆ 'a' ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
7. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಐದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

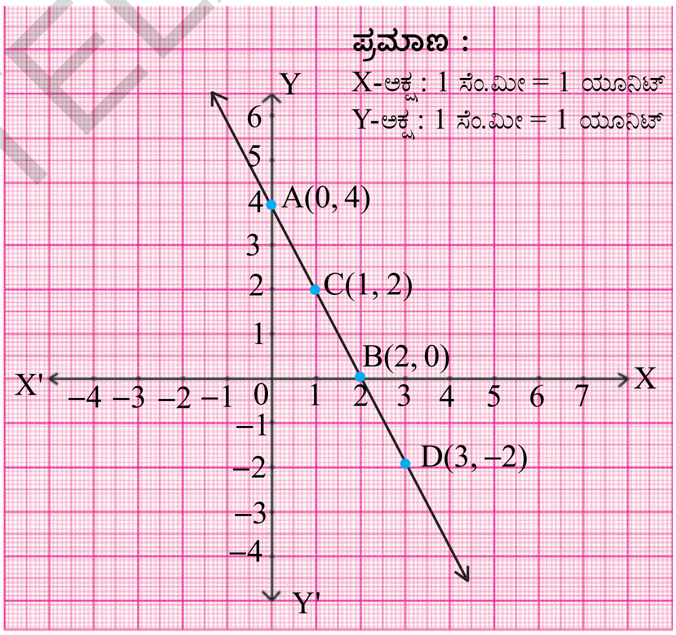
6.4 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ನಕ್ಷೆ (ಗ್ರಾಫ್)

ಪ್ರತಿ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳು ಅಥವಾ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಈ ಮೂಲಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆ (ಗ್ರಾಫ್)ಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಬಲ್ಲೆವೇ? ಪ್ರತಿ ಮೂಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ನ ಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

$4 = 2x + y$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದನ್ನು $y = 4 - 2x$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ 'x' ಬೆಲೆಗೆ y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x = 2$ ಆದರೆ $y = 0$ ಅಂದರೆ (2, 0) ಒಂದು ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ x ,y ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದರ ಕೆಳಗೊಂದು ಬರುವಂತೆ ಬರೆಯೋಣ.

ಮೂಲಗಳ ಪಟ್ಟಿ

x	$y = 4 - 2x$	(x, y)
0	$y = 4 - 2(0) = 4$	(0, 4)
2	$y = 4 - 2(2) = 0$	(2, 0)
1	$y = 4 - 2(1) = 2$	(1, 2)
3	$y = 4 - 2(3) = -2$	(3, –2)



ಪ್ರತಿ x ಬೆಲೆಗೆ ಒಂದು y ಬೆಲೆ ಇರುವುದನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. X-ಅಕ್ಷದೊಡನೆ 'x' ಬೆಲೆಗಳನ್ನು Y ಅಕ್ಷದೊಡನೆ 'y' ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು (0, 4), (2, 0), (1, 2) ಮತ್ತು (3, -2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವೆ? ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ AD ರೇಖೆ ಬರುತ್ತದೆ.

$x = 0$ ಆದರೆ
$y = 4 - 2x = 4 - 2(0) = 4$
$x = 2$ ಆದರೆ
$y = 4 - 2(2) = 0$

ಉಳಿದ ಬಿಂದುಗಳು (ಮೂಲಗಳು) ಸಹ AD ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆಯಾ?

ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು (4,– 4). ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು ಮೂಲವಾಗುವುದೇ?

AD ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅಂದರೆ ಈ ಬಿಂದುವು ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಈಗ AD ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (1, 1) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವುದಾ? ಅಂದರೆ ಪರಿಹಾರ ಆಗುವುದೇ?

AD ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ?

ನಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸೋಣ :

1. ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲವು, ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2. ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೆ.
3. ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ ಬಿಂದುವು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲವಾಗಲಾರದು ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲವಲ್ಲದ ಬಿಂದು ರೇಖೆ ಮೇಲಿರುವುದಿಲ್ಲ.
4. ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲವಾಗುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಆ ಸಮೀಕರಣದ ರೇಖಾನಕ್ಷೆ (ಗ್ರಾಫ್) ಆಗುತ್ತದೆ.

$ax + by + c = 0$ (a b ಗಳೆರಡೂ ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಲಾರವು) ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ರೇಖಾನಕ್ಷೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಆಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

6.4.1 ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆ (ಗ್ರಾಫ್)

ಹಂತಗಳು :

1. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = 0$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಅನುರೂಪ 'y' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y = 0$ ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಅನುರೂಪ 'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಹಂತಗಳು 2, 3ಗಳಲ್ಲಿ x, y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು x, y ನಿರ್ದೇಶಾಕಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
5. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.
6. ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

ಎಳೆದಂತಹ ರೇಖೆ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆ (ಗ್ರಾಫ್) ಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ರೇಖೆಯ ನಿಖರತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದೇಉ ಒಳ್ಳೆಯದು. ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು 'x' ಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪ 'y' ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :

ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ (2, 4) ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

1. ಈ (2, 4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲೆವೇ?
2. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲೆವು?
3. (2, 4) ಬಿಂದು ಪರಿಹಾರಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಷ್ಟು ಇವೆ?

E ¨ÝÖÀÁO -10. $y - 2x = 4$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಕೊಡಿ.

(i) (2, 8) ಬಿಂದು ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇದೆಯಾ? (2, 8) ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಆಗುವುದೇ?(2, 8) ನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ತಾಳೆ ನೋಡುವಿರಿ.

(ii) (4, 2) ಬಿಂದು ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇದೆಯೇ? ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ (4, 2) ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ ಆಗುವುದೇನೋ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

(iii) ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಮತ್ತೆ ಮೂರು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮೂಲಗಳಲ್ಲದವನ್ನು ಮೂರನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ $y - 2x = 4 \Rightarrow y = 2x + 4$

ಮೂಲಗಳ ಪಟ್ಟಿ

x	y = 2x + 4	(x, y)	ಬಿಂದು
0	$y = 2(0) + 4 = 4$	(0, 4)	A(0, 4)
2	$y = 2(-2)+4 = 0$	(–2, 0)	B(–2, 0)
1	$y = 2(1) + 4 = 6$	(1, 6)	C(1, 6)

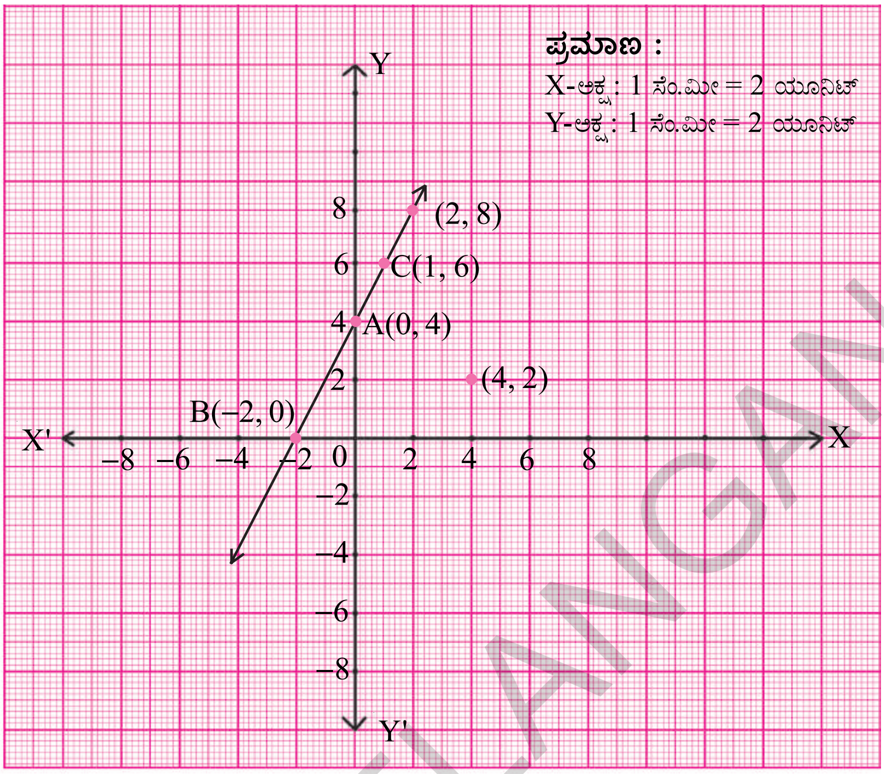
A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ಅದನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ BC ರೇಖೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಇದುವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ $y - 2x = 4$ ರ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರ ಆಗುತ್ತದೆ.

(i) (2, 8) ಬಿಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿದ BC ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು..

ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ತಾಳೆ ನೋಡಲು (2, 8) ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$LHS = y - 2x = 8 - 2x2 = 8 - 4 = 4 = RHS,$$

ಆದ್ದರಿಂದ (2, 8) ಮೂಲ ಆಗುತ್ತದೆ.



(ii) (4, 2) ಬಿಂದುವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿದರೆ ಅದು BC ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು..

ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ ತಾಳೆ ನೋಡುವುದು :(4, 2) ನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

LHS = $y - 2x = 2 - 2\times 4 = 2 - 8 = -6 \neq$ RHS, ಆದ್ದರಿಂದ(4, 2) ಮೂಲ ಅಲ್ಲ.

(iii) ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. (-4, -4), (-3, -2) ಮತ್ತು (-1, 2) ಬಿಂದುಗಳು $y - 2x + 4$ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು ರೇಖಾಚಿತ್ರದ ಮೇಲೆ ಬರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ (-1, 5) (2, 1) ಮತ್ತು (-4, 1) ಬಿಂದುಗಳು ಮೂಲಗಳಾಗುವದಿಲ್ಲ, ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ-11. $x - 2y = 3$ ರ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x = -5$ ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಒಂದು ಮೂಲ (x, y)

(ii) $y = 0$ ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಒಂದು ಮೂಲ (x, y)

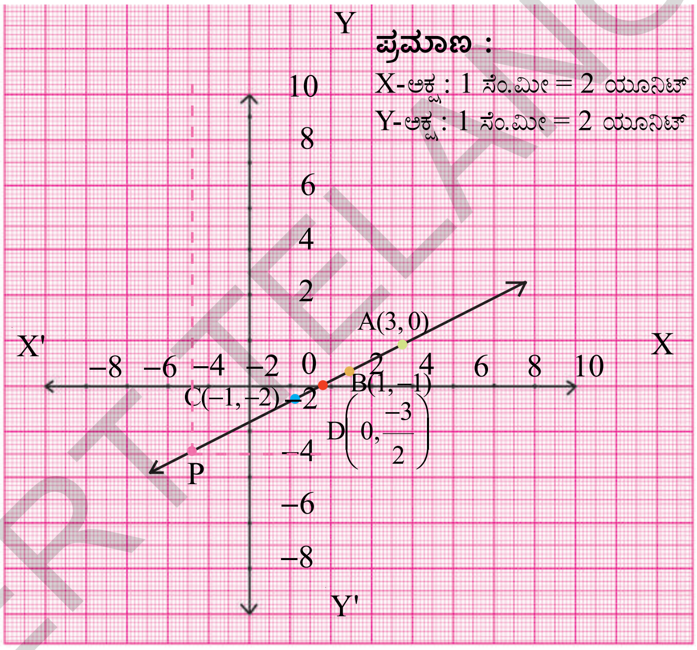
(iii) $x = 0$ ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಒಂದು ಮೂಲ (x, y)

ಪರಿಹಾರ : $x - 2y = 3 \Rightarrow y = \dfrac{x-3}{2}$

ಮೂಲಗಳ ಪಟ್ಟಿ

x	$y=\frac{x-3}{2}$	(x, y)	ಬಿಂದು
3	$y=\frac{3-3}{2}=0$	(3, 0)	A
1	$y=\frac{1-3}{2}=-1$	(1, – 1)	B
– 1	$y=\frac{-1-3}{2}=-2$	(– 1, – 2)	C

ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ A, B, C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ರೇಖೆಯೇ ಬೇಕಾದ $x - 2y = 3$ ರ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರ ಆಗುತ್ತದೆ.



(i) $x = -5$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ (x, y) ನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅಂದರೆ ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತಾ ಅದರ X - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ '– 5' ಆಗುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು x = -5 ಹತ್ತಿರ Y - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇದು ಗ್ರಾಫ್‌ನ್ನು 'P' ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆ ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಬಿಂದು P ನಿಂದ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದರೆ ಅದು Y-ಅಕ್ಷವನ್ನು – 4ರ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆ..

ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (– 5, – 4)

P(– 5, – 4) ಬಿಂದು $x - 2y = 3$, ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಅದು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) $y = 0$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಮೂಲ (x, y) ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = 0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದು (x, 0) ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $y = 0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದು X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತಾ $x - 2y = 3$ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಇಂತಹ ಒಂದು (3, 0) ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಮೂಲ = (3, 0).

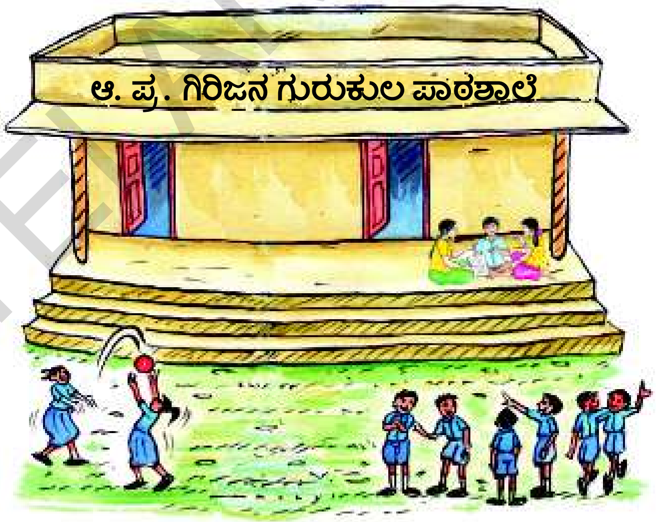
(iii) x = 0 ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಮೂಲ (x, y) ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

x = 0 ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದು (0, y) ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಬಿಂದುವು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.ಅಂದರೆ Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತಾ $x - 2y = 3$ ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಇಂತಹ ಬಿಂದು $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆವು.

ಮೂಲಗಳು = $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$.

ಉದಾಹರಣೆ-12. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 25% ಬಾಲಕಿಯರು, ಉಳಿದವವರು ಬಾಲಕರು. ಈ ಸಮಾಚಾರಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೂಪಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.



(i) ಬಾಲಕಿರಯರ ಸಂಖ್ಯೆ 25 ಆದರೆ ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ 45 ಆದರೆ ಬಾಲಕೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

(iii) ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅದಕ್ಕನು ಗುಣವಾಗಿ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ 'x' ಮತ್ತು ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ 'y' ಅಂದುಕೊಂಡರೆ

ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = x + y

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ ಬಾಲಕೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆ

ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ = 25% ಅಂದರೆ

x = (x + y) ಯಲ್ಲಿ 25%

$$= (x + y) \text{ ನಲ್ಲಿ } \frac{25}{100} = \frac{1}{4}(x + y)$$

$$x = \frac{1}{4}(x+y)$$

$$4x = x + y$$

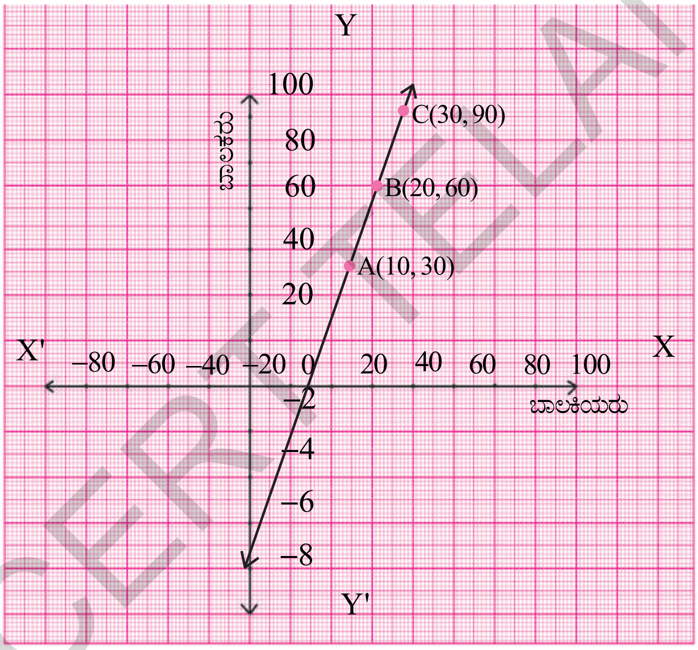
$$3x = y$$

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ $3x = y$ ಅಥವಾ $3x - y = 0$.

ಮೂಲಗಳ ಪಟ್ಟಿ

x	y = 3x	(x, y)	ಬಿಂದು
10	30	(10, 30)	A
20	60	(20, 60)	B
30	90	(30, 90)	C

ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಮೇಲೆ A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ AB ರೇಖೆ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.



ಪ್ರಮಾಣ :
X-ಅಕ್ಷ :
1 ಸೆಂ.ಮೀ = 20 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು
Y-ಅಕ್ಷ :
1 ಸೆಂ.ಮೀ = 20 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

ರೇಖಾಚಿತ್ರದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವು.

(i) ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ 25 ಆದರೆ ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ 75.

(ii) ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ 45, ಆದರೆ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ 15.

(iii) ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಿಮಗೆ ಇಷ್ಟವಾದ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳಿಗುಣವಾಗಿ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಅದೇ ರೀತಿ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಿಮಿಗಿಷ್ಟವಾದ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾದ ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಫ್‌ನ್ನು, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಸಮೀಕರಣ $y = 3x$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದೆ ಮತ್ತು ಸರಳ ರೇಖೆ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ. $y = mx$ (ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ) ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು (ನಕ್ಷೆಯನ್ನು) ಎಳೆದರೆ ಅದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ-13. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ರೇಖಾನಕ್ಷೆಗೆ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸರಿಯಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

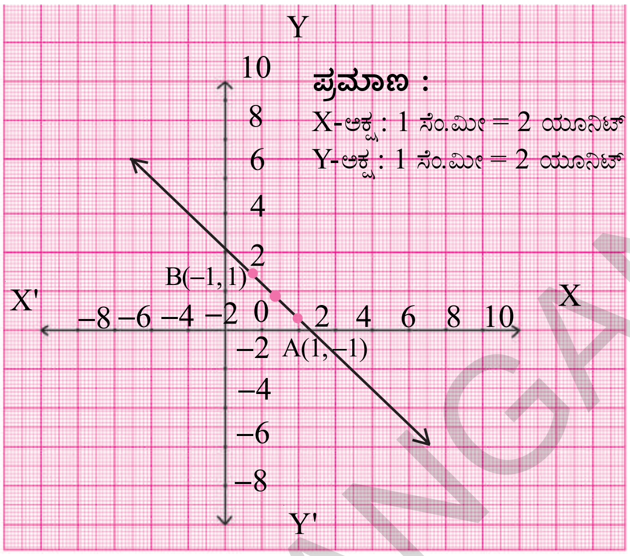
(i) ಸಮೀಕರಣಗಳು

A) $y = x$

B) $x + y = 0$

C) $y = 2x$

D) $2 + 3y = 7x$



(ii) ಸಮೀಕರಣಗಳು

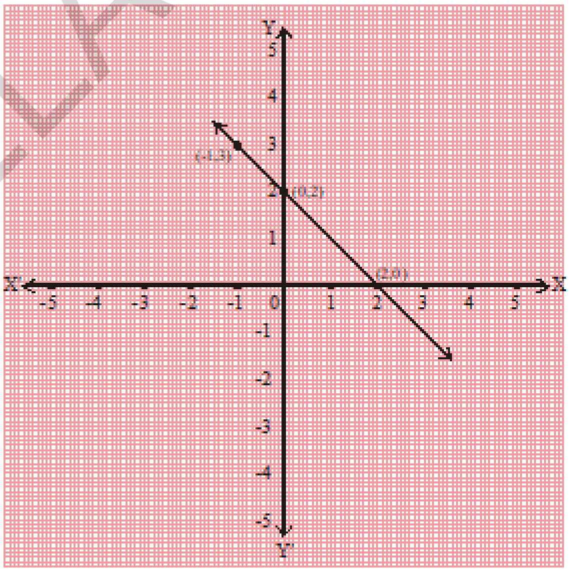
A) $y = x + 2$

B) $y = x - 2$

C) $y = -x + 2$

D) $x + 2y = 6$

ಪ್ರಮಾಣ :
X-ಅಕ್ಷ : 1 ಸೆಂ.ಮೀ = 2 ಯೂನಿಟ್
Y-ಅಕ್ಷ : 1 ಸೆಂ.ಮೀ = 2 ಯೂನಿಟ್



ಪರಿಹಾರ :

(i) ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ (1, −1) (0, 0) (−1, 1) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆ ಮೇಲಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಇವು ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಅದು ತೃಪ್ತಿಹೊಂದುವುದು. ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಯಾವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಅದು ತೃಪ್ತಿ ಹೊಂದುತ್ತದೋ ಅದುವೇ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ.

(1, −1) ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣ $y = x$ ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ. ಅದು ತೃಪ್ತಿ ಹೊಂದದು. ಆದ್ದರಿಂದ $y = x$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ ಅಲ್ಲ. ಆದರೆ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣ ತೃಪ್ತಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ನಿಜಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಮೂರು

1 cm = 2 units
1 cm = 2 units

ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣ ತೃಪ್ತಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x + y = 0$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉಳಿದ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಅವು ತೃಪ್ತಿ ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(iii) ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ (2, 0), (0, 2) ಮತ್ತು (–1, 3) ಬಿಂದುಗಳು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಮೊದಲನೇ, ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಮೂರನೇ ಸಮೀಕರಣ $y = -x + 2$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಅದು ತೃಪ್ತಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $y = -x + 2$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು $x + 2y = 6$ ನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.3

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

   i) $2y = -x + 1$ ii) $-x + y = 6$ iii) $3x + 5y = 15$ iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ರೇಖಾನ ಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ.

   i) $y = x$ ii) $y = 2x$ iii) $y = -2x$ iv) $y = 3x$ v) $y = -3x$

   i) ಇವೆಲ್ಲವೂ $y = mx$ (m ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇವೆಯಾ?

   ii) ಇವುಗಳ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತವೆಯೇ?

   iii) ಈ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ನೀನೇನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಲ್ಲೆ?

3. $2x + 3y = 11$ ರ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ? ಇದರಿಂದ $x = 1$ ಆದರೆ y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $y - x = 2$ ರ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ? ಇದರಿಂದ

   i) $x = 4$ ದರೆ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು

   ii) $y = -3$ ಆದರೆ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $2x+3y=12$ ರ ಗ್ರಾಫ್‌ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಗ್ರಾಫ್‌ನಿಂದ

   i) y- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 3 ಆಗುವಂತೆ

   ii) x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ -3 ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೇಖಾನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇವು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಛೇಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) $6x - 3y = 12$ ii) $-x + 4y = 8$ iii) $3x + 2y + 6 = 0$

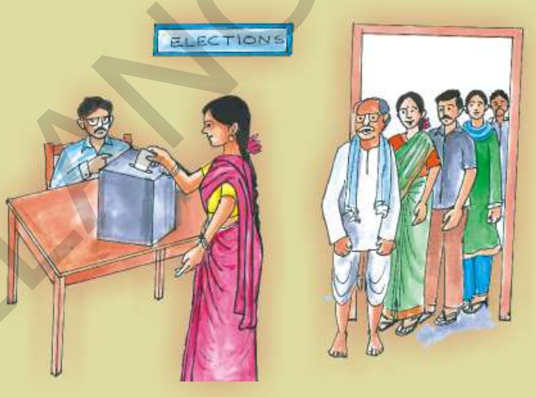
7. ರಜಿಯಾ ಮತ್ತು ಪ್ರೀತಿ ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 9 ನೇ ತರಗತಿ ಓದುತ್ತಿರುವರು. ಇವರು ನೈಸರ್ಗಿಕ ವಿಪತ್ತುಗಳು ಸಂಭವಿಸಿದಾಗ ಆಹುತರಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಲು ಪ್ರಧಾನ ಮಂತ್ರಿಗಳ ಸಹಾಯ ನಿಧಿಗೆ ₹1000 ಕೊಟ್ಟರು. ಈ ಸಮಾಚಾರಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೂಪಿಸಿ, ಅದಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

8. ಗೋಪಯ್ಯ ತನ್ನ 5000 ಚ.ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿ ಭತ್ತ, ಗೋಧಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿದ್ದಾನೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೂಪಿಸಿ, ಅದಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

9. 6 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.ತೂಕವುಳ್ಳ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಬಲವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಅದು ಹೊಂದಿದ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ, ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದ ಬಲಕ್ಕೆ ನೇರಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಪರಿಶೀಲಿನೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದು ಅದಕ್ಕೆ ರೇಖಾನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ಪರ್ವತದ ಮೇಲಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಲ್ಲು ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುತ್ತಾ ಇದೆ. ಇದರ ವೇಗ V = 9.8 t (t = ಸಮಯ) ಇದಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರಿಂದ '4' ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ವೇಗವೆಷ್ಟೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಂದು ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ 60% ಮತದಾರರು ತಮ್ಮ ಮತದಾನ ಹಕ್ಕನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,



(i) 1200 ಮತದಾರರು ಮಾತ್ರವೇ ತಮ್ಮ ಮತದಾನ ಹಕ್ಕನ್ನು ವಿನಿಯೋಗಿಸಕೊಂಡರೆ ಒಟ್ಟು ಮತದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಒಟ್ಟು ಮತದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ 800 ಆದರೆ ಮತದಾನ ಹಕ್ಕನ್ನು ವಿನಿಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡವರೆಷ್ಟು?

[**ಸೂಚನೆ :** ಮತದಾನ ಹಕ್ಕನ್ನು ವಿನಿಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡವರ ಸಂಖ್ಯೆ 'x' ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಮತದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ 'y' ಎಂದುಕೊಂಡರೆ x = 60% y.]

12. ರೂಪ ಹುಟ್ಟಿದಾಗ ಆಕೆಯ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು 25 ವರ್ಷಗಳು. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದು ಅದಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ರೂಪಾಗೆ 25 ವರ್ಷಗಳ ವಯಸ್ಸಿದ್ದಾಗ ಆಕೆಯ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು

(ii) ರೂಪಾಳ ತಂದೆಗೆ 40 ವರ್ಷಗಳಿದ್ದಾಗ ರೂಪಾಳ ವಯಸ್ಸು

13. ಒಬ್ಬ ಆಟೋದವನು ಮೊದಲ ಗಂಟೆ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ₹15 ನಂತರದ ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ₹ 8 ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವನು. ದೂರವನ್ನು 'x' ಕಿ.ಮೀ., ಕೊಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ₹ 'y' ಅಂದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಸಮಾಚಾರಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದು ಅದಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಮೊತ್ತ ₹ 55 ಆದರೆ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಮತ್ತು 7 ಗಂಟೆಗಳ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದರೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬಾಡಿಗೆ ಕೊಡುವ ಒಂದು ಲೈಬ್ರರಿ ಮೊದಲ ಮೂರು ದಿನಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನಿಗದಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು, ಆ ನಂತರ ಪ್ರತಿದಿನಕ್ಕೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಹಣವನ್ನು ವಸೂಲು ಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಜಾನ್ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು 7 ದಿನಗಳು ತನ್ನ ಬಳಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ₹ 27 ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಮೊದಲ ಮೂರು ದಿನಗಳ ನಿಗದಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು x ಮತ್ತು ನಂತರ ಪ್ರತಿದಿನಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಕೊಡುವ ಹಣವನ್ನು y ಎಂದುಕೊಂಡು ಇದಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ನಿಗದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 7 ಆದರೆ ಪ್ರತಿದಿನ ಕೊಡುವ ಹೆಚ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿದಿನ

ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಕೊಡುವ ಹಣ ₹ 4 ಆದರೆ ಮೊದಲ ಮೂರು ದಿನಗಳಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಸ್ಥಿರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಹೈದರಾಬಾದ್ ರೈಲ್ವೇ ಸ್ಟೇಷನ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾರನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಮೊದಲ ಎರಡು ಗಂಟೆಗಳಿಗೆ ₹ 50 ಆ ನಂತರ ಪ್ರತಿಗಂಟೆಗೆ ₹10 ಗಳನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು. ಈ ಸಮಾಚಾರಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಮೂರು ಗಂಟೆಗಳು ಕಾರುನಿಲ್ಲಿಸಲು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣ (ii) 6 ಗಂ॥ ಗಳು ಕಾರು ನಿಲ್ಲಿಸಿದರೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣ

(iii) ರೇಖ ಕೊಟ್ಟ ಹಣ ₹ 80 ಆದರೆ ಆಕೆ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಗಳು ಕಾರನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿದ್ದಾಳೆ.

16. ಸಮೀರಾ ಕಾರನ್ನು ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ 60 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ ವೇಗದಿಂದ ನಡೆಸುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ಹಾಗಾದರೆ ದೂರ – ಕಾಲಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಮೀರಾ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1\frac{1}{2}$ ಗಂ॥ (ii) 2 ಗಂ॥ (iii) $3\frac{1}{2}$ ಗಂ॥

17. ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಜಲಜನಕ ಮತ್ತು ಆಮ್ಲಜನಕಗಳ ಅಣುಭಾರಗಳ ಅನುಪಾತ 1:8 ಆದರೆ ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮತ್ತು ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರಿಂದ ಆಮ್ಲಜನಕದ ಪರಿಮಾಣ 12 ಗ್ರಾಂ. ಆದರೆ ಜಲಜನಕದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು, ಜಲಜನಕದ ಪರಿಮಾಣ $\frac{3}{2}$ ಗ್ರಾಂ॥ ಆದರೆ ಆಮ್ಲಜನಕದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[**ಸೂಚನೆ** : ಜಲಜನಕ ಮತ್ತು ಆಮ್ಲಕಜನಕ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 'x' 'y' ಅಂದುಕೊಂಡರೆ $x : y = 1:8 \Rightarrow 8x = y$]

18. 28 ಲೀಟರ್‌ಗಳ ಹಾಲು, ನೀರಿನ ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತ 5:2. ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣಕ್ಕೆ, ಹಾಲಿಗೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದು, ಅದಕ್ಕ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ಹಾಲಿನ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[**ಸೂಚನೆ :** ಮಿಶ್ರಣಕ್ಕೆ, ಹಾಲಿಗೆ ಇರುವ ಅನುಪಾತ $= 5 + 2 : 5 = 7 : 5$]

19. ಅಮೇರಿಕಾ, ಕೆನಾಡ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಉಷ್ಣವನ್ನು ಫಾರಸ್ ಹೀಟ್ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುವರು. ಆದರೆ ಭಾರತದಂತಹ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುವರು. ಫಾರನ್ ಹೀಟ್‌ಮಾನಕ್ಕೆ, ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಮಾನಕ್ಕೂ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. $F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$

(i) ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಡಿಗ್ರಿಗಳನ್ನು X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ, ಫಾರನ್ ಹೀಟ್ ಡಿಗ್ರಿಗಳನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

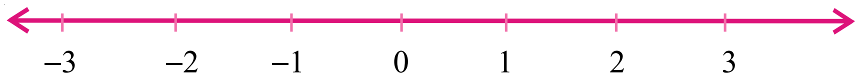
(ii) 30°C ಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಫಾರನ್‌ಹೀಟ್ ಮಾನದಲ್ಲಿನ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) 95°F ಸಮಾನವಾದ ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಮಾನದಲ್ಲಿನ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಮಾನದಲ್ಲೂ, ಫಾರನ್ ಹೀಟ್ ಮಾನದಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯಾ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಇದೆಯಾ? ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.5 x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$x = 3$ ರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಇದಕ್ಕೆ ಏಕೈಕ ಮೂಲ $x = 3$ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ತೋರಿಸಬಹುದು.



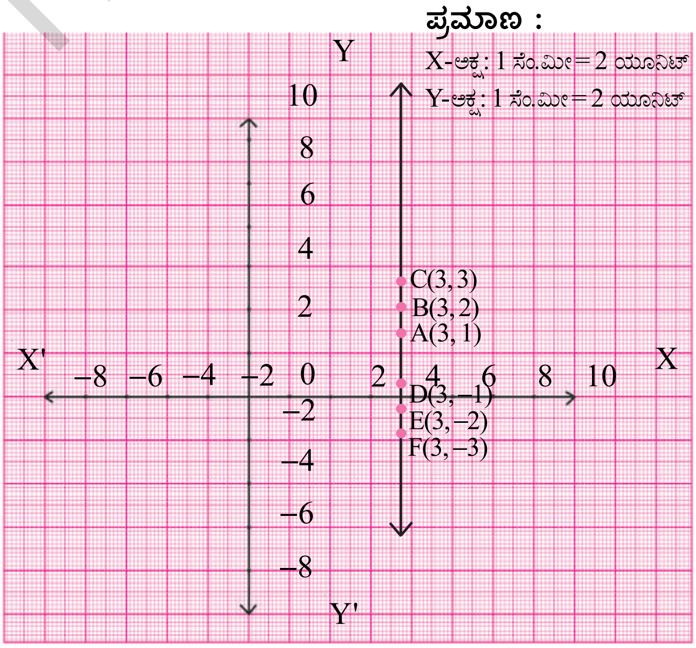
ಆದರೆ ಇದೇ ಸಮೀರಣವನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಇದನ್ನು $x + 0.y - 3 = 0$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಮೂಳಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ y ನ ಗುಣಕ ಸೊನ್ನೆ ದ್ದರಿಂದ y, ಬೆಲೆ ಯಾವುದಕ್ಕಾಗಲಿ x ಬೆಲೆ 3 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮೂಲಗಳ ಪಟ್ಟಿ

x	3	3	3	3	3	3	……
y	1	2	3	–1	–2	–3	…..
(x, y)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, –1)	(3, –2)	(3, –3)	…..
ಬಿಂದುಗಳು	A	B	C	D	E	F	…..

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವು (3, a) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅನಂತ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ 'a' ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.



ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದರಿಂದ ನೀನೇನು ಗಮನಿಸಬಲ್ಲಿರಿ?

ಇದು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯೇನಾ? ಇದು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೇಖೆಗಾಗಲಿ, ಅಕ್ಷಕ್ಕಾಗಲಿ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯಾ?

ಇದು Y- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ . ಈ ರೇಖೆ y-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ?

$x = 3$ ರೇಖೆ, y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತಾ, y ಅಕ್ಷದಿಂದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 3 ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. i) ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

   a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$

   ii) ಈ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳೆಲ್ಲವೂ Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯೇ?

   iii) ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗೂ Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2.i) ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

   a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $y = 3$ d) $y = -3$

   ii) ಈ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗಳೆಲ್ಲವೂ X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಇವೆಯೇ?

   iii) ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗೂ X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಲ್ಲೆವು :

1. $x = k$ ಯ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆ (ಸರಳರೇಖೆ) Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ, k ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತಾ (k, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

2. $y = k$ ಯ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆ (ಸರಳರೇಖೆ) X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ, k ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತಾ, (0, k) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

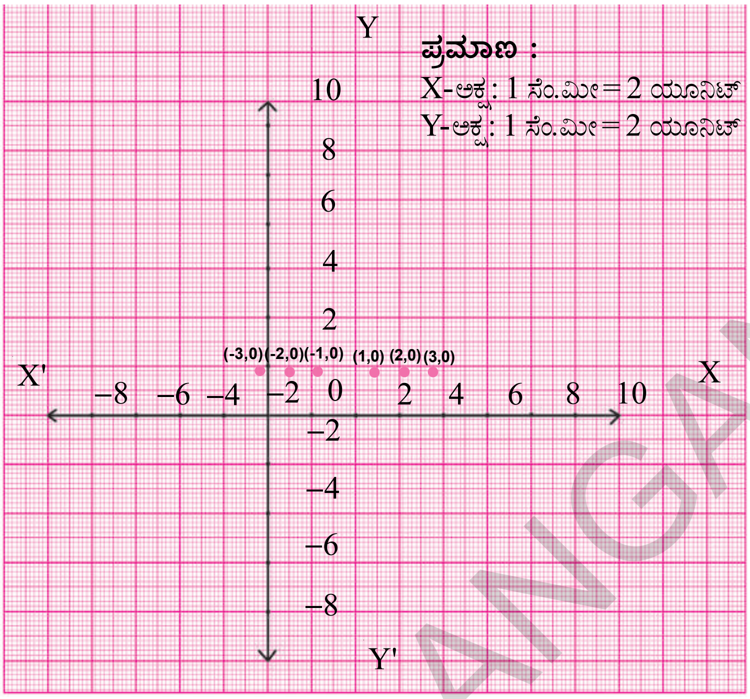
6.5.1 X-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y-ಅಕ್ಷಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

$y = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು $0.x + y = 0$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ ಇದಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ.

ಪರಿಹಾರಗಳ ಪಟ್ಟಿ

x	1	2	3	–1	–2	……
y	0	0	0	0	0	…..
(x, y)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(–1, 0)	(–2, 0)	…..
ಬಿಂದುಗಳು	A	B	C	D	E	…..

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿದರೆ, ಅವು ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ.



ಈ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವೂ X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $y = 0$ ಸಮೀಕರಣವು X-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ X-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ $y = 0$.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

y-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.5

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
   a) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು (ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ) b) ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರಿ

   i) $x = 3$ ii) $y + 3 = 0$ iii) $y = 4$ iv) $2x - 9 = 0$

   v) $3x + 5 = 0$
2. $2x - 11 = 0$ ನ್ನು

   i) ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ii) ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ. (ಗ್ರಾಫ್ ಎಳೆಯಿರಿ)

3. $3x + 2 = 8x - 8$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಮೂಲವನ್ನು

   i) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಮೇಲೆ ii) ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆಗಳಾಗಿ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

4. X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ, ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   i) $(0, -3)$ ii) $(0, 4)$ iii) $(2, -5)$ iv) $(3, 4)$

5. Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ, ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   i) $(-4, 0)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(3, 5)$ iv) $(-4, -3)$

6. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಮೂರು ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) X- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ . (ii) Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

1. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
2. ಒಂದು ಜೊತೆ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು 'x' ಮತ್ತು 'y' ಗಳು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸಿದರೆ ಅವನ್ನು ಮೂಲಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
3. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣವು ಅನಂತ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ.
4. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
5. $y = mx$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣವು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ..
6. $x = k$ ಎಂಬ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆ Y - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ, k ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ $(k, 0)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.
7. $y = k$ ಎಂಬ ರೇಖಾ ನಕ್ಷೆ X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ k ಪ್ರಮಾಣಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ $(0, k)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.
8. X-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ $y = 0$.
9. Y-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ $x = 0$.

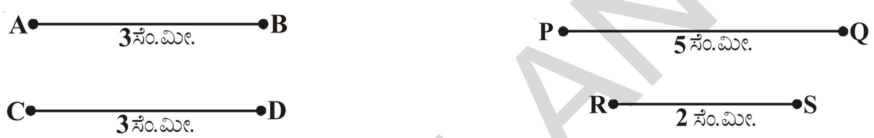
ತ್ರಿಭುಜಗಳು

07

7.1 ಪರಿಚಯ

ನಾವು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು, ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಬೇಕಾದ ಉದ್ದಗಳ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೋ ಗುರ್ತಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ ? ಎಲ್ಲಾ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಹೇಗೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರಬಹುದು ಹಾಗೆಯೇ ನಾವು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ನಮಗೆ ಯಾವ ಅಳತೆಬೇಕು ? ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಬೇಕು. ಹಾಗೆಯೇ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಸಹ ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

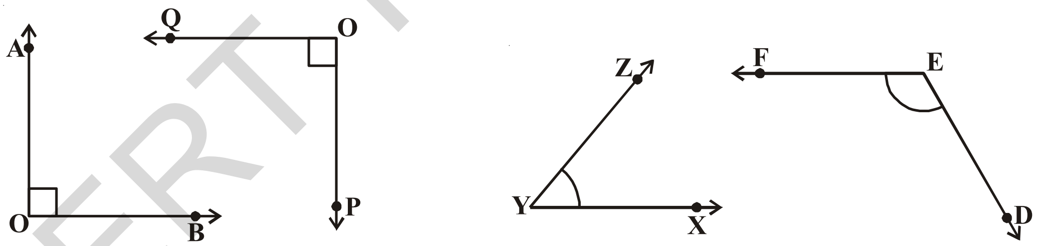
ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅವು ಸರ್ವಸಮಗಳು.



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ಸರ್ವಸಮ)

$\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$ (ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ)

ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕೆಂದರೆ ಆ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.



$\angle AOB \cong \angle POQ$ (ಸರ್ವಸಮ)

$\angle XYZ \ncong \angle DEF$ (ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ)

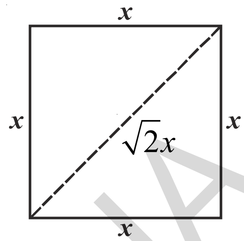
ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ಗಾತ್ರ ಸಮವೇ, ಅಲ್ಲವೇ? ಸರಿ ನೋಡಬೇಕೆಂದರೆ, ಆ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿವರಿಸುವ ಸ್ವಲ್ಪ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮಾಚಾರಬೇಕು.

ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ : ಎರಡೂ ಚೌಕಗಳು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಟ ಸಮಾಚಾರವೇನು ?

ನನಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಮಾತ್ರವೇಬೇಕು ಎಂದು ಸತ್ಯ ಹೇಳಿದಳು. ಎರಡು ಚೌಕಗಳ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಅವು ಸಮರೂಪ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಅದು ನಿಜವೇ ಆದರೆ ಎರಡು ಚೌಕಗಳ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಸಹ ಆ ಎರಡು ಚೌಕಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಿರಿ ಹೇಳಿದ್ದಾಳೆ.

ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಹೇಳಿದ್ದು ಸತ್ಯವೆಂದು ನೀವು ಭಾವಿಸುವಿರೇ?



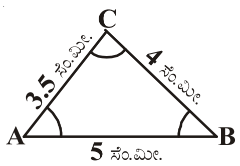
ಚೌಕದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಒಂದು ಬಾಹು ಅಳತೆಗಳಿಂದ ನೀವು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾರೆವು. ಹೌದೇ? ಹಾಗೆಯೇ ಎರಡು ಚೌಕಗಳ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಬೇಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದೇ ಆಕಾರ, ಗಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಸರ್ವಸಮ ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಗಳಾಗಿ ಸಮ ಎಂದರ್ಥ) ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಸಮ ಇಲ್ಲವೇ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಚೌಕಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಚೌಕಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಬಾಹುಗಳು ಗಾತ್ರವನ್ನು, ಕೋನಗಳು ಆಕಾರವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತವೆ.

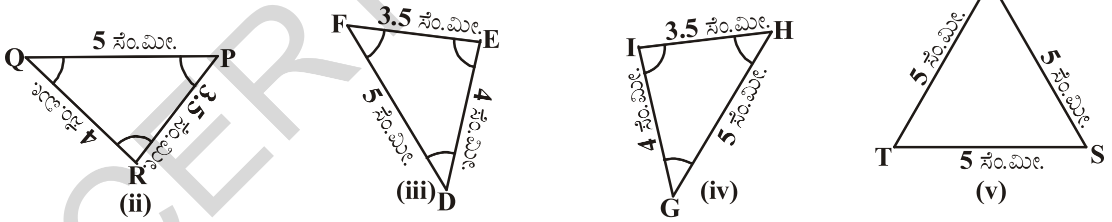
ಎರಡು ಚೌಕಗಳು ಸರ್ವಸಮಾನವಾದರೆ, ಆಎರಡು ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ನಕಲು ಮಾಡಿ ಮತ್ತೊಂದು ಚೌಕದ ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟರೆ ಅದು ಮತ್ತೊಂದು ಚೌಕದೊಂದಿಗೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ ನಾವು ಆ ಎರಡು ಚೌಕಗಳ ಬಾಹುಗಳು, ಕೋನಗಳು, ಕರ್ಣಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಈಗ ನಾವು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ ಬಗ್ಗೆ ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು, ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು, ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.



(i)

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಚಿತ್ರ (i)ರಲ್ಲಿ ΔABCಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ? ಚಿತ್ರ (ii) ಮತ್ತು (v)ವರೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನಾವು ನಕಲು ಮಾಡಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ΔABC ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟು ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ನೋಡಿರಿ.



(ii) (iii) (iv) (v)

ಚಿತ್ರಗಳು (ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ಗಳಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ΔABCಗೆ ಸರ್ವಸಮವೆಂದೂ, ಚಿತ್ರ (v)ರಲ್ಲಿ ΔTSU ತ್ರಿಭುಜ ΔABCಗೆ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂದು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ΔPQR ಮತ್ತು ΔABC ಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದರೆ ನಾವು $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಆದರೆ ΔPQR ಕೋನಗಳು, ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔABC ಯ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ PQ ,AB ಯೊಂದಿಗೆ, QR, BC ಯೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು RP, CA ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗೆಯೇ $\angle P$, $\angle A$ ನೊಂದಿಗೆ, $\angle Q$,$\angle B$ ನೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು $\angle R$, $\angle C$ ನೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತಿವೆ. ಅಂದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದು - ಒಂದು ಅನುರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ P ಶೃಂಗ A ಯೊಂದಿಗೆ, Q ಶೃಂಗ B ಯೊಂದಿಗೆ, R ಶೃಂಗ C ನೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ನಾವು $P \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow B$, $R \leftrightarrow C$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\Delta PQR \cong \Delta ABC$

ಈ ಅನುರೂಪದಲ್ಲಿ ನೀವು ಗುರ್ತು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದ್ದು $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು $Q \leftrightarrow A$, $R \leftrightarrow B$, $P \leftrightarrow C$, $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು ಸರಿಯಲ್ಲ. $QR = AB$, $RP = BC$ ಮತ್ತು $QP = AC$ ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಯಾವುದು ಸರಿಯಾದುದ್ದು ಅಲ್ಲ?

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಚಿತ್ರ (iii) ರಲ್ಲಿ

$FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$ ಮತ್ತು $EF \leftrightarrow CA$

ಮತ್ತು $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$ ಮತ್ತು $E \leftrightarrow C$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ ಇದನ್ನು $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು ಸರಿಯಲ್ಲ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಚಿತ್ರ (iv) ರಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ΔABC ಗೆ ಅನುರೂಪತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತ್ವ ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಶೃಂಗಗಳ ಒಂದು-ಒಂದು ಅನುರೂಪತೆಯನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಎನ್ನುವುದು ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ.

ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ. "ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು" ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ 'CPCT' (**Corresponding Parts of Congruent Triangles**) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

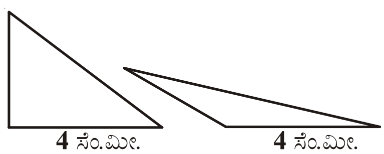
1. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಅವು ಸತ್ಯವೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಸರಿನೋಡಿರಿ :
   - i. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರ್ವಸಮ. (   )
   - ii. ಒಂದೇ ಉದ್ದ ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರ್ವಸಮ. (   )
   - iii. ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಕೆಲವು ಸಲ ಸರ್ವಸಮಾನ. (   )
   - iv. ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರ್ವಸಮಗಳು (   )
2. ಕೊಟ್ಟ ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವೋ ಅಲ್ಲವೋ ಸರಿನೋಡಲು ಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಟ ಅಳತೆಗಳು ಎಷ್ಟು?
   - i. ಎರಡು ಆಯತಗಳು
   - ii. ಎರಡು ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳು

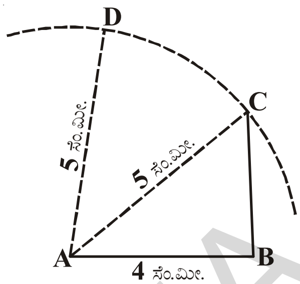
7.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಲು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು :

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಲು ಬೇಕಾದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಗುರುತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು, ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವೇ? ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೀವು ಯಾವಾಗ ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ?

ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 4 ಸೆಂ.ಮೀ.ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಬರುತ್ತವೆಯೇ? ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ನೀವು ಅನೇಕ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ.

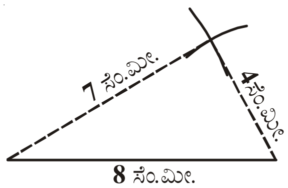




ಈಗ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೀವು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಯೇ?

ಕೊಟ್ಟ ಈ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಈಗ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು 4 ಸೆಂ.ಮೀ., 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8 ಸೆಂ.ಮೀ.

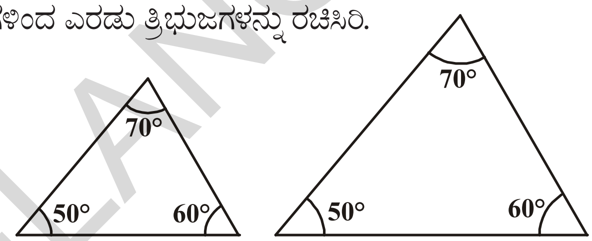


ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ನೀವು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ ನಾವು ಒಂದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೀರಿ. ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈಗ ನೀವು ಇಷ್ಟವಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಆದರೆ ಆ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಇರಬೇಕು. ನೀವು ಆರಿಸಿಕೊಂಡ ಆ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ಮಹಿಮ ಗಮನಿಸಿದಳು.

$\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$



ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಂದ ಒಂದು ಏಕೈಕ ನಿಶ್ಚಿತ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

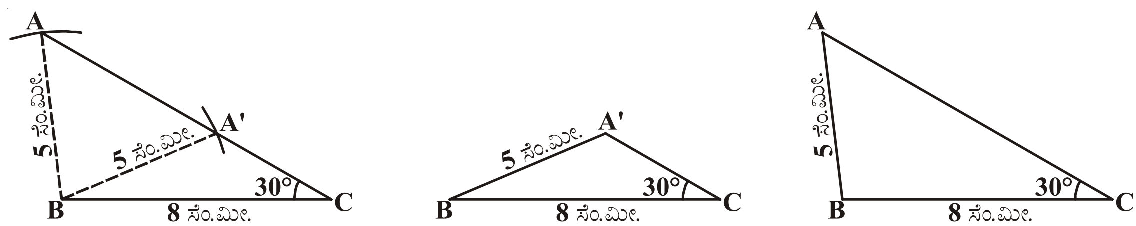
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ತ್ರಿಭುಜ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ನಿಯಮದ ಆಧಾರದವಾಗಿ ನಾನು ಮೂರನೇ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವೆ ಎಂದು ಷರೀಫ್ ಭಾವಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಮೂರನೇ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಆ ಎರಡರ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮುರು ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವುದು ಸಾಕಾಗದು. ಅವನು ಹೇಳಿದ್ದು ನಿಜವೇ. ಒಂದು ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ಮೂರು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಮತ್ತು ಸ್ವತಂತ್ರ ಅಳತೆಗಳು ಬೇಕು.

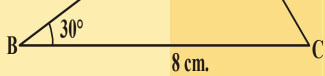
ಈಗ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

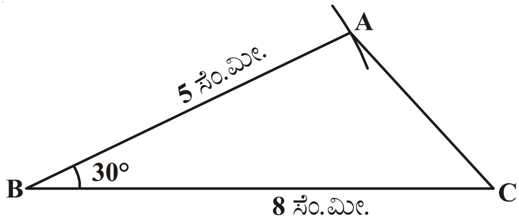
i. AB = ಸೆಂ.ಮೀ., BC = 8 ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle C = 30°$ ಗಳಿಂದ ΔABC .

ii. AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ., BC = 8 ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle B = 30°$ ಗಳಿಂದ ΔABC .

(i) ನೀವು (i) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ನೀವು ರಚಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯರು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜಗಳೊಂದಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.







ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ΔABC ಮತ್ತು $\Delta A'BC$ ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಮತ್ತೆ (ii) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಅವು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳೇ ? ಅಲ್ಲವೇ ?

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ (ii) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(i) & (ii) ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಗಮನಿಸಿದ್ದೀದ್ವರಾ (i) ನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಒಂದು ಕೋನ ಕೊಟ್ಟರೂ ಕೋನ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಅಲ್ಲ (ii) ನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯವಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಳತೆಗಳ ಕ್ರಮವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜ ರಚನೆಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ.

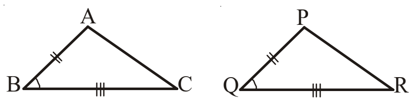
7.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ :

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ನಮಗೆ ಒಂದು ಬಾಹು ಸಮವಾಗಿರುವ ಇಲ್ಲವೇ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ನಾವು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು, ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಹ ಅವು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಹೇಳಲಾರೆವು. ಆ ಕೋನ ಸಮಾನ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಕೋನವಾದಾಗ ಮಾತ್ರವೇ ಅವು ಸರ್ವಸಮಗಳು. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಬಾಹು – ಕೋನ – ಬಾಹು – ಸರ್ವಸಮತೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಬಾಹು – ಬಾಹು – ಕೋನ ಇಲ್ಲವೇ ಕೋನ – ಬಾಹು – ಬಾಹು ವರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೊದಲು ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಉಳಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಿದ್ಧಾಂತ (ಬಾಹು-ಕೋನ-ಬಾಹು ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ (ಬಾ-ಕೋ-ಬಾ) :

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

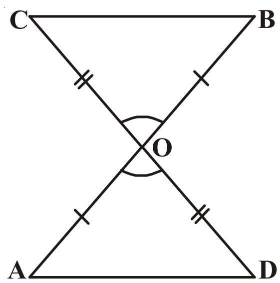


ಉದಾ: ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ನಲ್ಲಿ

$AB=PQ, BC=QR$ ಮತ್ತು $\angle ABC=\angle PQR$

ಉದಾ-1: ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಗಳು 'O' ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ, $OA = OB$ ಮತ್ತು $OD = OC$ ಆದರೆ

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ ಮತ್ತು (ii) $AD \parallel BC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : (i) ΔAOD ಮತ್ತು ΔBOC ಇವುಗಳಲ್ಲಿ

$OA = OB$ (ದತ್ತ)

$OD = OC$ (ದತ್ತ)

$\angle AOD$ ಮತ್ತು $\angle BOC$ ಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AOD = \angle BOC$.

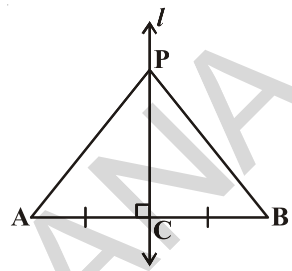
ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ)

(ii) AOD ಮತ್ತು BOC, ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮ

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle OAD = \angle OBC$ ಮತ್ತು AD ಮತ್ತು BC ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು. ಆದರಿಂದ $AD \parallel BC$

ಉದಾ-2. AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ, ಸರಳರೇಖೆ 'l' ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆ. ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P ಒಂದು ಬಿಂದು ಆದರೆ ಈ P ಬಿಂದು. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $l \perp AB$ ಮತ್ತು ಈ ರೇಖೆ 'l' ರೇಖಾಖಂಡ ABಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು C ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.



ನಾವು $PA = PB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ΔPCA ಮತ್ತು ΔPCB ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$AC = BC$ (AB ಗೆ C ಮಧ್ಯಬಿಂದು)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (ದತ್ತ)

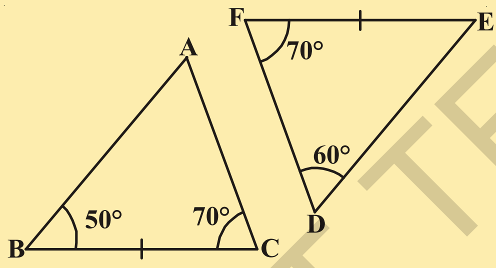
$PC = PC$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ)

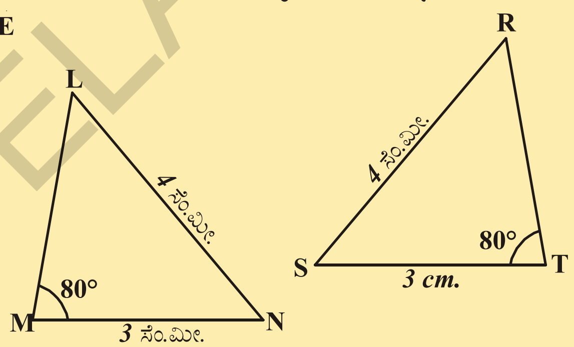
ಆದ್ದರಿಂದ $PA = PB$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ)

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳು ಹೌದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.



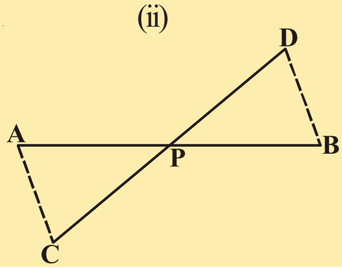
(i)



(ii)

2. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB,DC ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು P ಬಿಂದು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ

$\Delta APC \cong \Delta BPD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

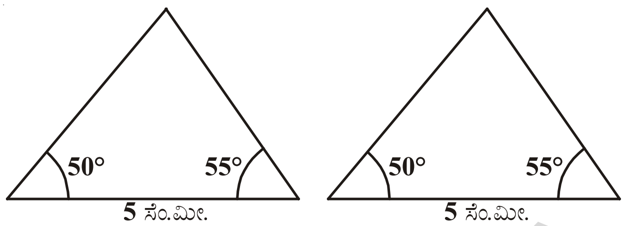


7.3 ಇತರೆ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು :

ಎರಡು ಕೋನಗಳು 50^0, 55^0 ಮತ್ತು ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಈ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಜೋಡಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ? ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳೆಂದು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಾವು ಸರ್ವಸಮತೆ ಕೋನ – ಬಾಹು – ಕೋನ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇದನ್ನು ನಾವು **ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ ಸಿದ್ಧಾಂತ** ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಾವು ಋಜುವಾತು ಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಾವು ಸಿದ್ಧಾಂತ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಋಜುವಾತು ಮಾಡಲು ನಾವು ಸರ್ವಸಮತೆ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.



ಸಿದ್ಧಾಂತ 7.1 (ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ) : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮನ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿತ್ತವೆ.

ದತ್ತ : ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ಮತ್ತು $\overline{BC} = \overline{EF}$

ಸಾಧನೀಯ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

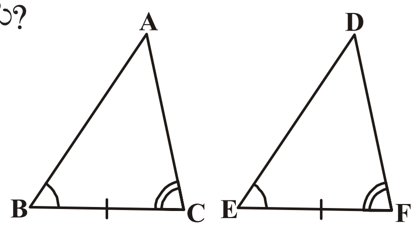
ಸಾಧನೆ : ಇದಕ್ಕೆ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಿವೆ

$\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{DE}$ ಗಳಿಗೆ ಸಂದರ್ಭಗಳು $\overline{AB} > \overline{DE}$ ಇಲ್ಲವೇ $\overline{AB} > \overline{DE}$ ಇಲ್ಲವೇ $\overline{DE} = \overline{AB}$.

ನಾವು ಈಗ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಸಂದರ್ಭ (i): $\overline{AB} = \overline{DE}$ ಆದರೆ ನಾವು ಈಗ ಏನು ಗಮನಿಸಬಹುದು?

ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.



$\overline{AB} = \overline{DE}$ (ಊಹಿಸಿದ್ದು)

$\angle B = \angle E$ (ದತ್ತ)

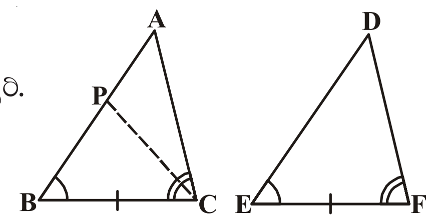
$\overline{BC} = \overline{EF}$ (ದತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$(ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ)

ಸಂದರ್ಭ (ii): ಎರಡನೇ ಸಂದರ್ಭ $AB > DE$ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$PB = DE$ ಆಗುವಂತೆ AB ಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈಗ ΔPBC ಮತ್ತು ΔDEF ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.



$\overline{PB} = \overline{DE}$ (ರಚನೆ ಪ್ರಕಾರ)

$\angle B = \angle E$ (ದತ್ತ)

$\overline{BC} = \overline{EF}$ (ದತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta PBC \cong \Delta DEF$(ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle PCB = \angle DFE$

ಆದರೆ, $\angle ACB = \angle DFE$ (ದತ್ತ)

ಆದರಿಂದ $\angle ACB = \angle PCB$ (ಮೇಲಿನ ಸಮಾಚಾರದಿಂದ)

ಆದರೆ, ಇದು ಸಾಧ್ಯವೇ?

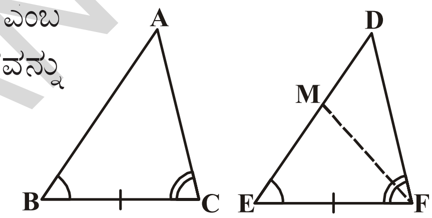
ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕೆಂದರೆ P ಬಿಂದು A ನೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗಬೇಕು.

(ಇಲ್ಲವೇ) $BA = ED$

ಆಗ, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$(ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

(**ಗಮನಿಸಿ :** ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ ನಾವು $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$ ಮತ್ತು $\overline{BC} = \overline{EF}$ ಆದರೆ $\overline{AB} = \overline{DE}$ ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು)

ಸಂದರ್ಭ (iii): ಮೂರನೇ ಸಂದರ್ಭ $AB < DE$



$ME = AB$ ಆಗುವಂತೆ ΔDEF ನಲ್ಲಿ DE ಯ ಮೇಲೆ M ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಸಂದರ್ಭ (ii) ರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ವಾದವನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ $AB < DE$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಇದನ್ನು ನೀವು ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು, ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ. ಇಲ್ಲಿ ಆ ಬಾಹು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಾಹು ಅಲ್ಲ. ಆದರೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿತ್ತವೆಯೇ? ಅವು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಏಕೋ ನೀವು ಕಾರಣವನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$. ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಮೂರನೇ ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಹ ಸಮಾನವಾಗುತ್ತವೆ. ($180°$ – ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ).

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. ಇದನ್ನು ನಾವು ಕೋ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈಗ ಮತ್ತೇ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾ-3: ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $AB \parallel DC$ ಮತ್ತು $AD \parallel BC$ ಆದರೆ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

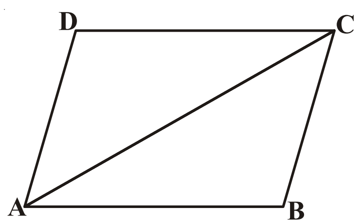
ಪರಿಹಾರ : ΔABC ಮತ್ತು ΔCDA ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$\angle BAC = \angle DCA$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

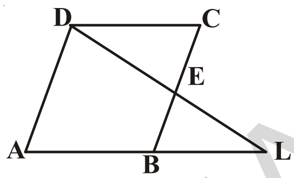
$AC = CA$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

$\angle BCA = \angle DAC$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$(ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸರ್ವಸಮ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ)



ಉದಾ-4: ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $AL \parallel DC$, BC ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆದರೆ $\Delta EBL \cong \Delta ECD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : ΔEBL ಮತ್ತು ΔECD ಯಲ್ಲಿ

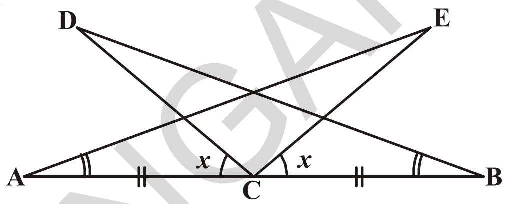
$\angle BEL = \angle CED$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

$BE = CE$ (BC ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆದ್ದರಿಂದ)

$\angle EBL = \angle ECD$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$ (ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ ಸರ್ವಸಮತೆ)

ಉದಾ-5: ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು :



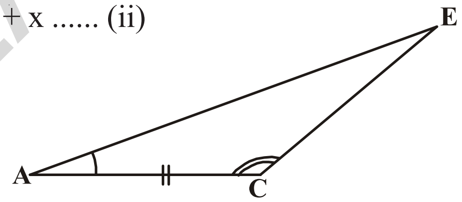
(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

(ii) $DC = EC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $\angle ACD = \angle BCE = x$ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$\therefore \angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

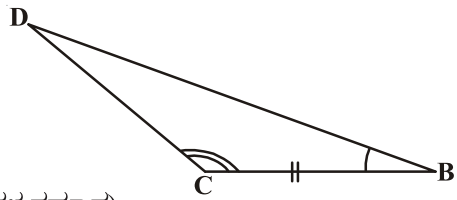


(i) ಮತ್ತು (ii) ಗಳಿಂದ : $\angle ACE = \angle BCD$

ΔDBC ಮತ್ತು ΔEAC ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle ACE = \angle BCD$ (ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ)

$BC = AC$ [ದತ್ತ]



$\angle CBD = \angle EAC$ [ದತ್ತ]

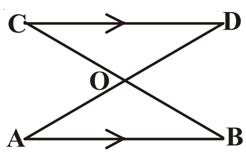
$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ [ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಪ್ರಕಾರ]

$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ ಆದ್ದರಿಂದ

$DC = EC$.(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರುಪ ಬಾಹುಗಳ ಸಮಾನ)

ಉದಾ-6: AB , CDಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳು. AD ಮಧ್ಯಬಿಂದು O ಆದರೆ

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC ಮಧ್ಯಬಿಂದು O ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : (i) ΔAOB ಮತ್ತು ΔDOC ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle ABO = \angle DCO$ ($AB \parallel CD$, BC ಛೇದನರೇಖೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

$\angle AOB = \angle DOC$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

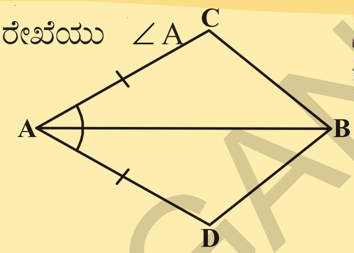
$OA = OD$ (ದತ್ತ)

$\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ)

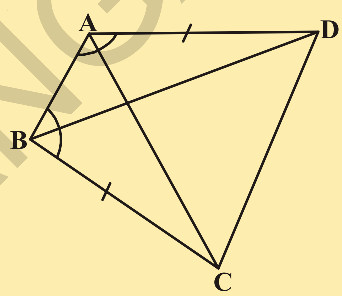
(ii) OB = OC (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ)

ಆದ್ದರಿಂದ , BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು O.

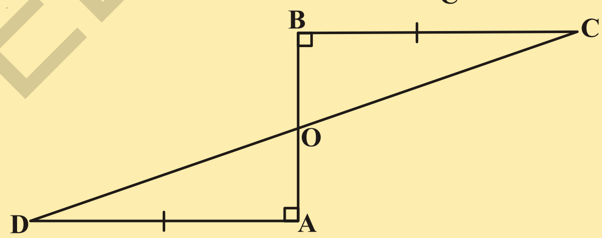
ಅಭ್ಯಾಸ 7.1



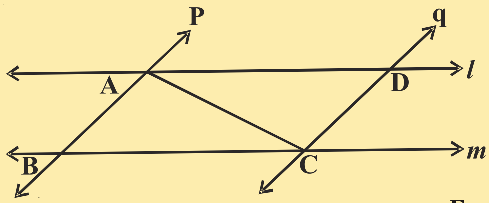
1. ಚತುರ್ಭುಜ ACBD ಯಲ್ಲಿ, AC = AD ಮತ್ತು AB ರೇಖೆಯು $\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಯಾದರೆ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$. BC ಮತ್ತು BD ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿವೇನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ.



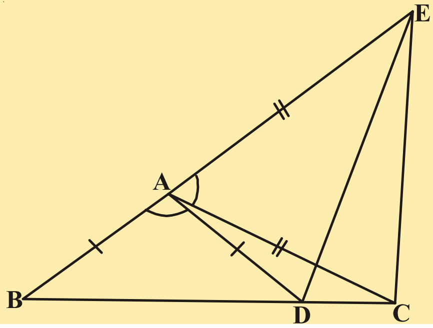
2. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ AD = BC ಮತ್ತು $\angle DAB = \angle CBA$ ಆದರೆ
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
   (ii) BD = AC
   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



3. AD, BC ಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ರೇಖಾಖಂಡ ABಗೆ ಲಂಬಗಳು ಆದರೆ CD ರೇಖಾಖಂಡವು AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

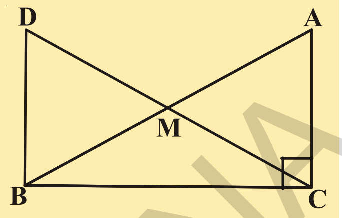


4. l ಮತ್ತು m ಎಂಬ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು p ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಛೇದಿಸಿವೆ. ಆದರೆ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



5. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AC = AE, AB = AD ಮತ್ತು $\angle BAD = \angle EAC$ ಆದರೆ BC = DE ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABCಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ C ಬಳಿ ಇದೆ, ಕರ್ಣ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M. C ಬಿಂದುವನ್ನುM ಗೆ ಸೇರಿಸಿ DM = CM ಆಗುವಂತೆ D ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು B ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ



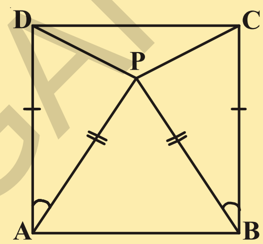
(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle$ DBC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

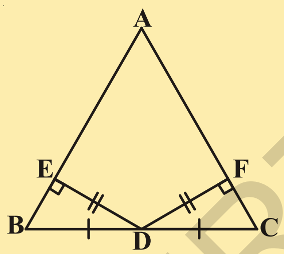
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಚೌಕ ಮತ್ತು ΔAPB ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾದರೆ $\Delta APD \cong \Delta BPC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



(**ಸೂಚನೆ :** ΔAPD ಮತ್ತು ΔBPC ಗಳಲ್ಲಿ $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ ಮತ್ತು $\angle PAD = \angle PBC = 90^o - 60^o = 30^o$]

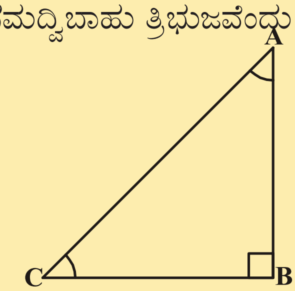
8. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC ಯಲ್ಲಿ BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D. $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ ಮತ್ತು DE = DF ಆದರೆ $\Delta BED \cong \Delta CFD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



9. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನದ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ಸಹ ಅರ್ಧಿಸಿದ ಆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

10. ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ. B ಲಂಬಕೋನ ಶೃಂಗವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\angle BCA = 2\angle BAC$ ಆದರೆ ಕರ್ಣ AC = 2BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(**ಸೂಚನೆ** : BC = BD ಆಗುವಂತೆ CB ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ)

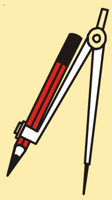


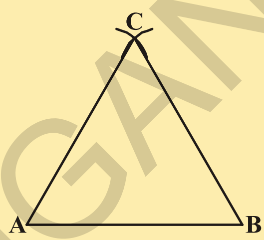
7.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು :

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಎರಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಕುರಿತು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ನಾವು ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

i. ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಯಾವುದೇ ಸ್ವಲ್ಪ ಅಳತೆಯಿಂದ ರೇಖಾಖಂಡ AB ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೈವಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ತಕ್ಕಷ್ಟು ಅಳತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳ ಬಳಿ ಇಟ್ಟು ಕಂಸಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ ನಿಮಗೆ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ತ್ರಿಭುಜ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ? ಹೌದು ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ΔABC, $AC = BC$ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಈಗ ಕೋನಗಳು $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ?

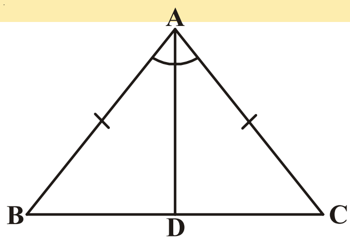




ii. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ.
ಆಗ ದೊರೆತ ಸರ್ವಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದಿರಿಸಿದಾಗ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಮಡಚಿರಿ. $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಗಳ ಕುರಿತು ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ?

ಅಂತಹ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿ ಇರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುರುತ್ತೀರಿ.

ಇದು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಇದು ಸತ್ಯ ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.



ಪ್ರಮೇಯ-7.2 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಾವು ಅನೇಕ ಪದ್ದತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಆ ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ದತ್ತ : ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $AB = AC$.

ಸಾಧನೀಯ : $\angle B = \angle C$.

ರಚನೆ: $\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಇದು ಬಾಹು BC ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸುವುದು.

ಸಾಧನೆ : ΔBAD ಮತ್ತು ΔCAD ಗಳಲ್ಲಿ

$AB = AC$ (ದತ್ತ)

$\angle BAD = \angle CAD$ (ರಚನೆ)

$AD = AD$ (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

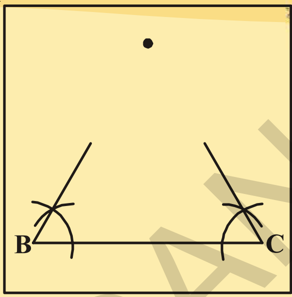
ಆದರಿಂದ, $\angle ABD = \angle ACD$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ)

ಅಂದರೆ $\angle B = \angle C$ (ಸಮಾನ ಕೋನಗಳು)

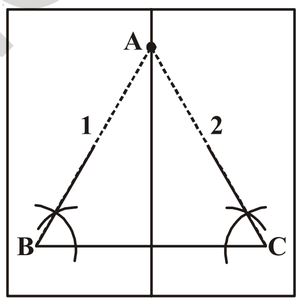
ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸತ್ಯವೇ ? ಅಂದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಹ ಸಮ ಎಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

ಚಟುವಟಿಕೆ :

1. ಒಂದು ಪಾರದರ್ಶಕ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಯಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾ ಖಂಡ BC ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
2. B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳ ಬಳಿ 60^0 ಕೋನ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಹಾಗೆ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ A ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.
3. B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಕಾಗದವನ್ನು ಮಡಚಿರಿ. ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ? AB,AC ಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ?

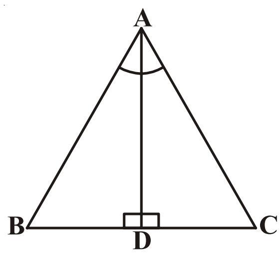


$\angle$B ಮತ್ತು $\angle$C ಗಳು ಒಂದೇ ಕೋನಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಮ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.



ಪ್ರಮೇಯ -7.3 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಎದುರಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮ. ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಋಜು ಮಾಡಿರಿ.



ಉದಾ-7: ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$A ನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ AD, BC ಬಾಹುವಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ AB = AC ಎಂದು ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹುವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ΔABD ಮತ್ತು ΔACD ಯಲ್ಲಿ

$\angle$BAD = $\angle$CAD (ದತ್ತ)

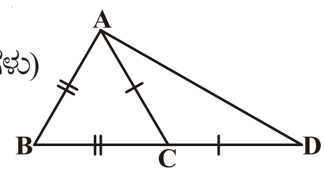
AD = AD (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

$\angle$ADB = $\angle$ADC = 90° (ದತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ, ΔABD $\cong$ ΔACD (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ)

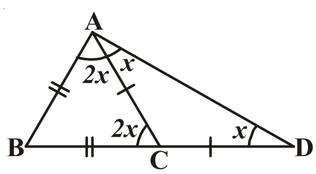
ಆದ್ದರಿಂದ, AB = AC (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು)

ಇಲ್ಲವೇ, ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.



ಉದಾ-8: ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB = BC ಮತ್ತು AC = CD.

ಆದರೆ $\angle$BAD : $\angle$ADB = 3 : 1 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಪರಿಹಾರ : $\angle$ADB = x ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ΔACD ಯಲ್ಲಿ, $AC = CD$

$\Rightarrow \quad \angle CAD = \angle CDA = x$

ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯಕೋನ $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle ACB = 2x.$ ($\because$ ABCಯಲ್ಲಿ $AB = BC$)

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

$= 2x + x = 3x$

ಮತ್ತು, $\dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

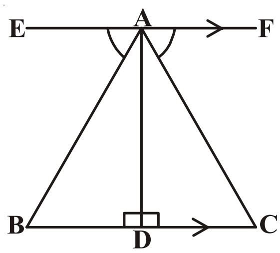
ಅಂದರೆ, $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1.$

ಆದರಿಂದ ಇದು ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾ-9: ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AD ಎನ್ನುವುದು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $EF \parallel BC$, ಇನ್ನೂ $\angle EAB = \angle FAC$ ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜ ABD ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ ACD ಗಳು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಇನ್ನೂ $AB = 2x + 3$, $AC = 3y + 1$,

$BD = x$ ಮತ್ತು $DC = y + 1$ ಆದರೆ x, y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : $AD \perp EF$

$\Rightarrow \quad \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (ದತ್ತ)

$\Rightarrow \quad \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \quad \angle BAD = \angle CAD$

ΔABD ಮತ್ತು ΔACD ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle BAD = \angle CAD$ [ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ]

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ [$AD \perp BC$ ದತ್ತ]

ಮತ್ತು $AD = AD$

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ]

ಇದು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

$\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow AB = AC$ ಮತ್ತು $BD = CD$ [ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು]

$\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$ ಮತ್ತು $x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - 3y = -2$ ಮತ್ತು $x - y = 1$

ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಾಧಿಸಿದಾಗ $x = 1 + y$

$2(1+y) - 3y = -2$

$2 + 2y - 3y = -2$

$-y = -2 - 2$

$-y = -4$

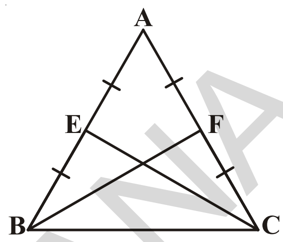
ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಾಧಿಸಿದಾಗ $y = 4$ in $x = 1 + y$

$x = 1 + 4$

$x = 5$

ಉದಾ-10: ΔABC ಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಬಾಹುಗಳು AB, AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) BF = CE ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ΔABF ಯಲ್ಲಿ ΔACE ಗಳಲ್ಲಿ



AB = AC (ದತ್ತ)

$\angle A = \angle A$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

AF = AE (ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ)

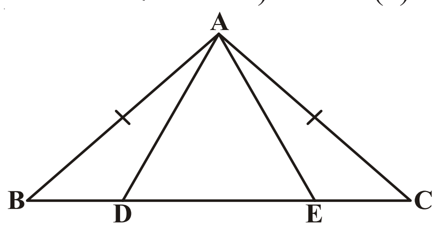
BF = CE (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮ)

ಉದಾ-11. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC, D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳು BC ಯ ಮೇಲೆ BE = CD ಆಗುವಂತೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳು (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ AD = AE ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ΔABD ಮತ್ತು ΔACE ಗಳಲ್ಲಿ

AB = AC (ದತ್ತ) .... (1)

$\angle B = \angle C$ (ಸಮಾನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವಕೋನಗಳು ಸಮ) .... (2)



ಇನ್ನೂ, BE = CD

ಆದ್ದರಿಂದ, BE – DE = CD – DE

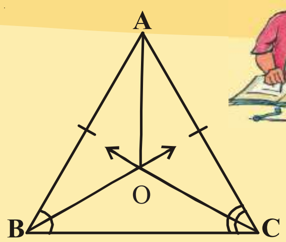
ಅಂದರೆ, BD = CE (3)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

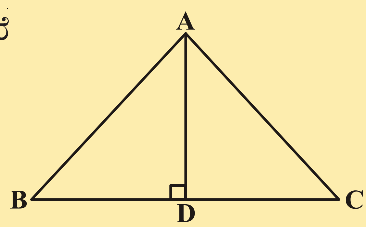
((1), (2), (3) ಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ).

ಇದರಿಂದ AD = AE (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು)

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

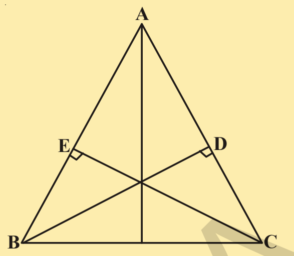


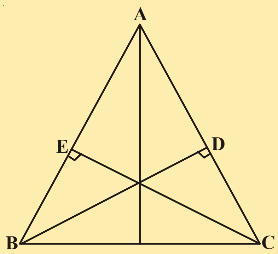
1. ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC, $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ. A ಮತ್ತು O ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.
   (i) OB = OC (ii) AO, $\angle A$ ಗೆ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆ.



2. ΔABC ಯಲ್ಲಿ AD ಎನ್ನುವುದು BC ಬಾಹುವಿಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ). ΔABC, AB = AC ಆಗುವಂತೆ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3. ತ್ರಿಭುಜ ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಸಮಬಾಹುಗಳು AC, AB ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BD ಮತ್ತು CE ಆದರೆ ಈ ಲಂಬಗಳು ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

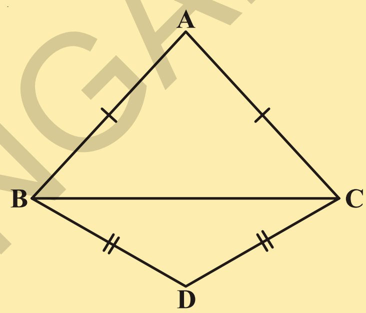




4. ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AC, AB ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು BD ಮತ್ತು CE ಗಳು ಸಮ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

(ii) AB = AC ಎಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



5. ΔABC, ΔDBC ಗಳು ಒಂದೇ ಬಾಹು BC ಯ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ $\angle ABD = \angle ACD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7.5 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮತ್ತೇ ಕೆಲವು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು :

ಪ್ರಮೇಯ– 7.4 (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ) :

ರಚನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಸೂಕ್ತವಾದ ರಚನೆ ಮಾಡಿ ಅದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಸಾಧನೆ :

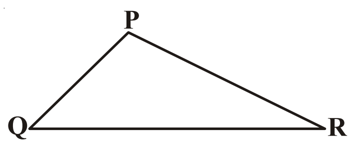
ದತ್ತ : ΔPQR ಮತ್ತು ΔXYZ ಗಳಲ್ಲಿ PQ = XY, QR = YZ ಮತ್ತು PR = XZ

ಸಾಧನೀಯ : $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

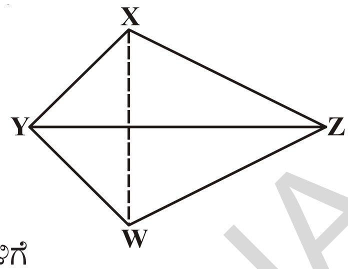
ರಚನೆ : $\angle ZYW = \angle PQR$ ಮತ್ತು WY = PQ ಆಗುವಂತೆ YW ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. XW ಮತ್ತು WZ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ΔPQR ಮತ್ತು ΔWYZ ಗಳಲ್ಲಿ

QR = YZ	(ದತ್ತ)
$\angle PQR = \angle ZYW$	(ರಚನೆ)
PQ = YW	(ರಚನೆ)
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta WYZ$	(ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ)



$\Rightarrow \angle P = \angle W$ ಮತ್ತು $PR = WZ$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)



$PQ = XY$ (ದತ್ತ) ಮತ್ತು $PQ = YW$ (ರಚನೆ)

$\therefore XY = YW$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ, $XZ = WZ$

ΔXYW ಗಳಲ್ಲಿ $XY = YW$

$\Rightarrow \angle YWX = \angle YXW$ (ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಸಮ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ)

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ, $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\therefore \angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\Rightarrow \angle W = \angle X$

ಈಗ, $\angle W = \angle P$

$\therefore \angle P = \angle X$

ΔPQR ಮತ್ತು ΔXYZ ಗಳಲ್ಲಿ

$PQ = XY$

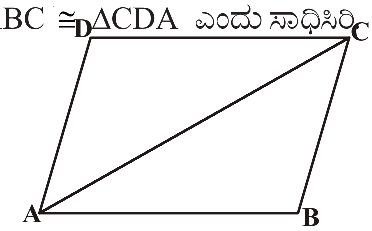
$\angle P = \angle X$

$PR = XZ$

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಇದರ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಉದಾ-12: ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $AB = CD$, $BC=AD$ ಆದರೆ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ΔABC ಮತ್ತು ΔCDA ಗಳಲ್ಲಿ

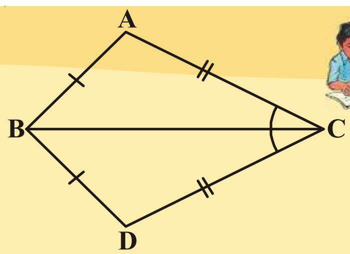
$AB = CD$ (ದತ್ತ)

$AD = BC$ (ದತ್ತ)

$AC = CA$ (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :



1. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔDBC ಗಳು $\overline{AB} = \overline{BD}$ ಮತ್ತು $\overline{AC} = \overline{CD}$ ಆಗುವಂತೆ ಇರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಆದರೆ $\Delta ABC \cong \Delta DBC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ, ಸಮ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಸಮಾನ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಮಧ್ಯ ಕೋನ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಆಗದೇ ಇರಬಹುದು.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

ಕರ್ಣ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ? ನೀವು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಯೇ? ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಸಮಾನ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದರಮೇಲೊಂದು ಬರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಅವಶ್ಯಕವಾದರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವಿರಿ? ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣ, ಬಾಹು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎರಡನೆ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ, ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯವಿರುವ ಕೋನವಲ್ಲವೆಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 7.5 (ಲಂ. ಕ. ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ) :

ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಲಂಬಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಲಂ.ಕ.ಬಾ. ಎಂದರೆ ಲಂಬಕೋನ – ಕರ್ಣ – ಬಾಹು

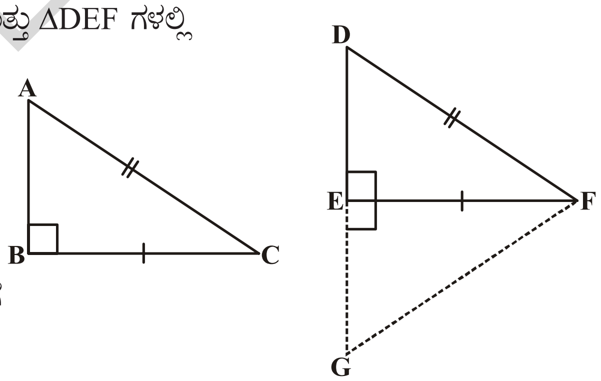
ಈಗ ಸಾಧನೆ ಮಾಡೋಣ.

ದತ್ತ : ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = 90^o$ ಮತ್ತು

$\angle E = 90^o$ $AC = DF$

ಮತ್ತು $BC = EF$.



ಸಾಧನೀಯ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ರಚನೆ : $EG = AB$ ಆಗುವಂತೆ DE ಯನ್ನು G ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ. G, F ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ :

ಹೇಳಿಕೆಗಳು	**ಕಾರಣ**
ΔABC ಮತ್ತು ΔGEF ಗಳಲ್ಲಿ	
$AB = GE$	(ರಚನೆ ಪ್ರಕಾರ)
$\angle B = \angle FEG$	(ಪ್ರತಿಕೋನ ಲಂಬಕೋನ (90^0))
$BC = EF$	(ದತ್ತ)
$\Delta ABC \cong \Delta GEF$	(ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ)
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A = \angle G \ldots (1)$	(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

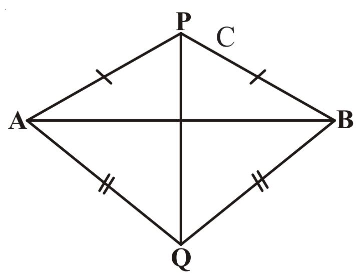
AC = GF … (2)	(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)
ಇನ್ನೂ AC=GF ಮತ್ತು AC=DF	((2) ಮತ್ತು ದತ್ತ)
DF = GF	(ಮೇಲಿನವುಗಳಿಂದ)
ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle D = \angle G$ … (3)	(ಸಮಾನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)
ಮತ್ತೆ $\angle A = \angle D$ … (4)	((1) ಮತ್ತು (3) ಗಳಿಂದ)
ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF $\angle A = \angle D$,	((4) ರಿಂದ)
$\angle B = \angle E$	(ದತ್ತ)
ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$	(ಸೇರಿಸಿದಾಗ)
ಆದರೆ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ ಮತ್ತು	(ತ್ರಿಭುಜ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ)
$\angle D + \angle E + \angle F = 180^0$	(ತ್ರಿಭುಜ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ)
180 - $\angle C$ = 180 - $\angle F$	($\angle A + \angle B = 180^0 - \angle C$ ಮತ್ತು $\angle D + \angle E = 180^0 - \angle F$)
ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle C = \angle F$, … (5)	(ರದ್ದು ಮಾಡುವಿಕೆ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಪ್ರಕಾರ)
ಈಗ, ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ	
BC = EF	(ದತ್ತ)
$\angle C = \angle F$	((5) ರಿಂದ)
AC = DF	(ದತ್ತ)
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಉದಾ-13: AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ, P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು AB ಗೆ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲೂ A,B ಗೆ ಸಮಾನ ದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ PQ ರೇಖೆ AB ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : PA = PB ಮತ್ತು QA = QB ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ನೀವು PQ, AB ಗೆ ಲಂಬವೆಂದು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. PQ, AB ಯನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಆಲೋಚಿಸುವಿರಾ?

ΔPAQ ಮತ್ತು ΔPBQ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ



ಈ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ

AP = BP (ದತ್ತ)

AQ = BQ (ದತ್ತ)

PQ = PQ (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

$\angle APQ = \angle BPQ$ (ಸರ್ವಸಮತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ΔPAC ಮತ್ತು ΔPBC ಗಳಲ್ಲಿ

AP = BP (ದತ್ತ)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ)

$PC = PC$ (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ)

$AC = BC$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು) .... (1)

ಮತ್ತು $\angle ACP = \angle BCP$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು)

ಇನ್ನೂ, $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $2\angle ACP = 180°$

ಇಲ್ಲವೇ, $\angle ACP = 90°$ .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ಗಳಿಂದ PQ, AB ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

[ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯವೇನೆಂದರೆ ΔPAQ, ΔPBQ ಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ ಋಜುವಾತು ಮಾಡದೇ $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲಾರೆವು.

$AP = BP$ (ದತ್ತ)

$PC = PC$ (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

ಮತ್ತು $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಸಮ ಕೋನಗಳು)

(ಇದರಿಂದ ಇವು ಎರಡೂ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಫಲಿತಾಂಶ ಬಾ.ಬಾ.ಕೋ. ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯವಲ್ಲ. ಇನ್ನೂ ಕೋನದ ಜೊತೆ ಸಮಾನ ಬಾಹುಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಮಧ್ಯಕೋನ ಅಲ್ಲ)

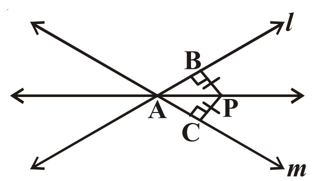
ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾ-14: l ಮತ್ತು m ರೇಖೆಗಳು A ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. P ಬಿಂದು ಈ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿ ಇದೆ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) AP ರೇಖೆ l ಮತ್ತು m ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : l ಮತ್ತು m ರೇಖೆಗಳು A ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ.

PB, l ಗೆ ಲಂಬ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳಿ, $PC \perp m$.

$PB = PC$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



$\angle PAB = \angle PAC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ΔPAB , ΔPAC ಗಳಲ್ಲಿ

$PB = PC$ (ದತ್ತ)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (ದತ್ತ)

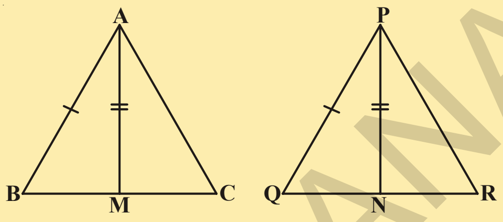
$PA = PA$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (ಲಂ.ಕ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ)

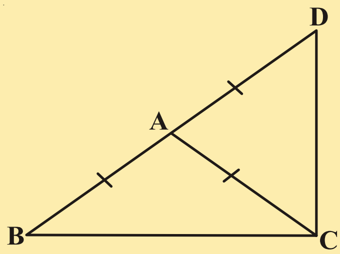
ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle PAB = \angle PAC$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

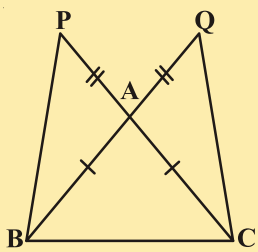
1. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC, AD ಎನ್ನುವುದು A ನಿಂದ BC ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಆದರೆ
   (i) BC ಬಾಹುವನ್ನು AD ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು
   (ii) $\angle A$ ನ್ನು AD ಕೋನಾರ್ಧಿಸುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



2. ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು AB, BC ಮತ್ತು ಮಧ್ಯರೇಖೆ AM ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔPQR ನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು PQ, QR ಗಳು ಮತ್ತು ಮಧ್ಯರೇಖೆ PN ಗೆ ಸಮ. (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ
   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$
   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
3. ΔABC ಯಲ್ಲಿ BE, CF ಗಳು ಎರಡು ಸಮಾನ ಲಂಬಗಳು ಲಂ.ಕಂ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.
4. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC ಆದರೆ $\angle B = \angle C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.
   (ಸೂಚನೆ: $AP \perp BC$ ಆಗಿವಂತೆ AP ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ, ಲಂ.ಕ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ)



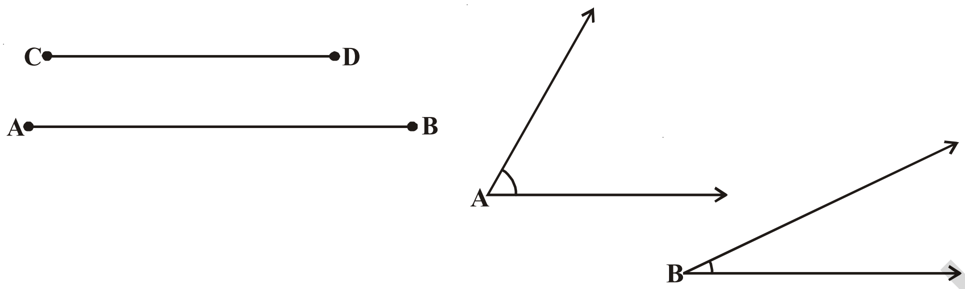
5. ಒಂದು ಸಮ್ವಾಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC. AD = AB ಆಗುವಂತೆ ಬಾಹು BA ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ). $\angle BCD$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
6. ΔABC ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ. ಇದರಲ್ಲಿ $\angle A = 90^0$ ಮತ್ತು AB = AC ಆದರೆ $\angle B = \angle C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
7. ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಕೋನ 60^0 ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



8. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overline{AB} = \overline{AC}$, ಆದ್ದರಿಂದ ΔABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ $\overline{BA}$ ಮತ್ತು $\overline{CA}$ ಗಳನ್ನು $\overline{AQ} = \overline{AP}$ ಆಗುವಂತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ Q ಮತ್ತು P ಬಿಂದುಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದರೆ $\overline{PB} = \overline{QC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
   (**ಸೂಚನೆ :** ΔAPB ಮತ್ತು ΔACQ ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ)

7.5 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅಸಮತೆ :

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ತ್ರಿಭುಜ ಇಲ್ಲವೇ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಸಮಾನತ್ವದ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಲವು ಬಾರಿ ಅಸಮಾಗಳಾದ ವಸ್ತುಗಳು ಬಂದಾಗ ನಾವು ಹೋಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣಗೆ ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ ರೇಖಾಖಂಡ AB ಉದ್ದ, ರೇಖಾಖಂಡ CD ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ $\angle A$, $\angle B$ ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು.



(i) (ii)

ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಸಮವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಅಥವಾ ಅಸಮವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಮಧ್ಯೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆ ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

1. ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ CAನ್ನು ಬಿಂದು A' ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ (ಹೊಸಸ್ಥಾನ).

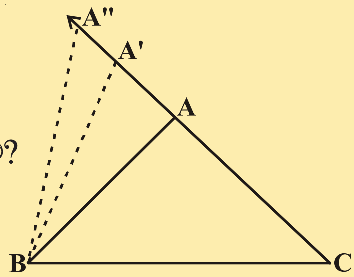
ಆದ್ದರಿಂದ, $A'C > AC$ (ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ)

A', B ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ತ್ರಿಭುಜ $A'BC$ ನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿರಿ.

ಈಗ ನೀವು $\angle A'BC$ ಮತ್ತು $\angle ABC$ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?

ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಹೋಲಿಸಿರಿ, ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, $\angle A'BC > \angle ABC$



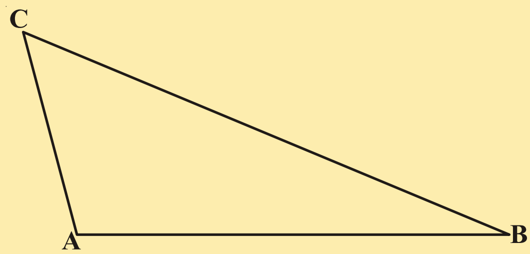
ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ CA ನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲೆ ಅನೇಕ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. BC ಬಾಹುವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಬಾಹು AC ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದ್ದಾಗ (ಬಿಂದು A ಗೆ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದಾಗ) ಅದಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನ ಅಂದರೆ $\angle B$ ಸಹ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

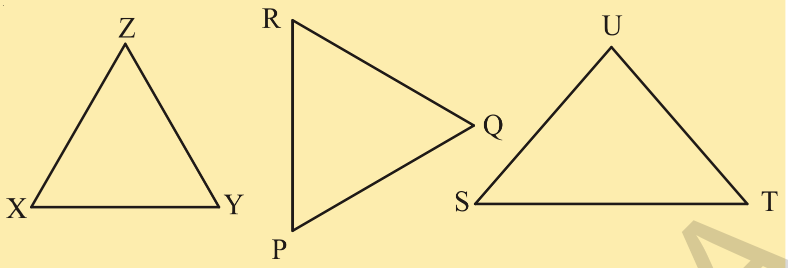
ಈಗ ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆ ಮಾಡೋಣ.

2. ಒಂದು ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ) ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

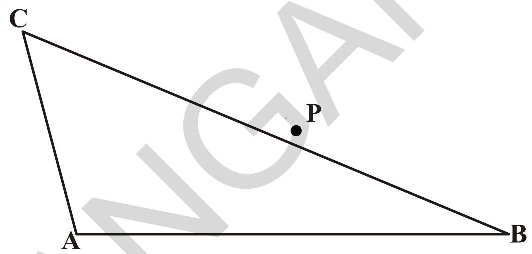


ΔABC ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ BC ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವಿರುವ ಬಾಹು ಮತ್ತು AC ಕಡಿಮೆ ಉದ್ದವಿರುವ ಬಾಹು. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ, $\angle A$ ದೊಡ್ಡ ಕೋನ ಮತ್ತು $\angle B$ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನ.



ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಬಾಹುವನ್ನು ಅದರ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯೆ ನೀವು ಯಾವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ?

ಪ್ರಮೇಯ -7.6 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಅಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎದುರಿನ ಕೋನವು ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿನ ಎದುರಿನ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

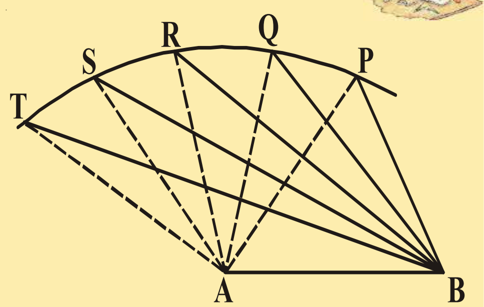


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ CA = CP ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ BC ಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಋಜುವಾತು ಮಾಡಬಹುದು.

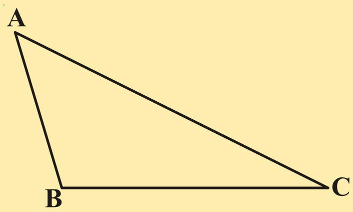
ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಸ್ವಲ್ಪ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಮೇಲೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳು P, Q, R, S, T ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಈ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿರಿ. (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ). ನಾವು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ T ಬಿಂದುವಿನ ಕಡೆಗೆ ಹೋದಂತೆಲ್ಲಾ $\angle A$ ಕ್ರಮವಾಗಿ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಎದುರಿನಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಹೇಗೆ ಇರುತ್ತದೆ? ಅದಕ್ಕೆ ಎದುರಿನ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯೂ ಸಹ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ ಮತ್ತು TB > SB > RB > QB > PB.

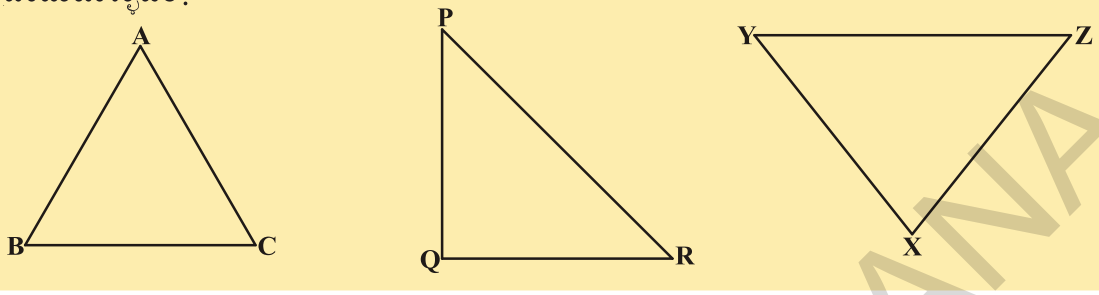


ಈಗ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಇರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎದುರಿನ ಬಾಹು ಉದ್ದವಾಗಿ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನ $\angle B$ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಉದ್ದವಾದ ಬಾಹು AC.

ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಂದ ಪುನಃ ಮಾಡಿರಿ. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿಲೋಮ ಸತ್ಯವೆಂದು ಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳನ್ನು, ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಒಂದೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಎದುರಿಗೆ ಇರುವ ಕೋನಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ ಏನಾಗಿರಬಹುದೆಂದು ಎಂದುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ?



ಈ ವಿಧವಾಗಿ ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯ ಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ -7.7 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖ (ಎದುರಿನ)ವಾಗಿರುವ ಬಾಹು ದೊಡ್ಡದು (ಉದ್ದವಾದುದು)

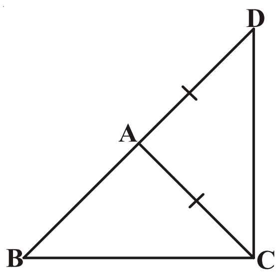
ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ವಿರೋಧೋಕ್ತಿ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ಈಗ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ AB + BC, BC + AC ಮತ್ತು AC + AB ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಅವುಗಳ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ ?

$AB + BC > AC$, $BC + AC > AB$ ಮತ್ತು $AC + AB > BC$ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ -7.8 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

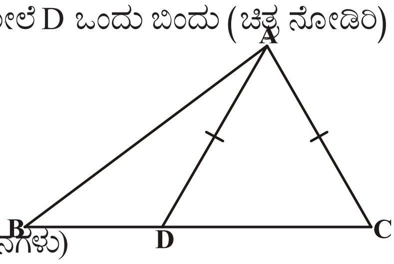


ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC ಯಲ್ಲಿ $AD = AC$ ಆಗುವಂತೆ ಬಾಹು BA ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. $\angle BCD > \angle BDC$ ಮತ್ತು $BA + AC > BC$? ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಿರಾ?

ಈ ಫಲಿತಾಂಶ ಮೇಲೆ ಆಧರಿಸಿ ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಉದಾ-15: ΔABC ಯಲ್ಲಿ $AD = AC$ ಆಗುವಂತೆ ಬಾಹು BC ಯ ಮೇಲೆ D ಒಂದು ಬಿಂದು (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ $AB > AD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಪರಿಹಾರ : ΔDAC ಯಲ್ಲಿ

$AD = AC$ (ದತ್ತ)

ಆದರೆ, $\angle ADC = \angle ACD$ (ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಈಗ , $\angle ADC$, ΔABD ಗೆ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನ

ಆದರೆ, $\angle ADC > \angle ABD$

ಅಥವಾ, $\angle ACD > \angle ABD$

ಅಥವಾ, $\angle ACB > \angle ABC$

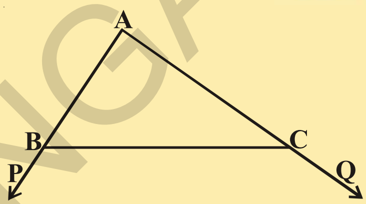
ಆಗ, $AB > AC$ (ΔABC ಯಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎದುರಿನ ಬಾಹು)

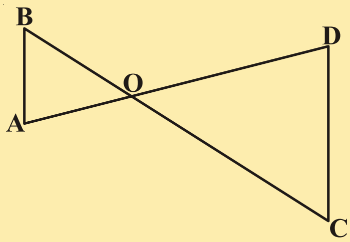
ಅಥವಾ, $AB > AD$ ($AD = AC$ ಆದ್ದರಿಂದ)

ಅಭ್ಯಾಸ 7.4

1. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC ಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳು AB, AC ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P , Q ಬಿಂದುಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ದಿಸಿದೆ.

   ಇನ್ನೂ, $\angle PBC < \angle QCB$, ಆದರೆ $AC > AB$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ

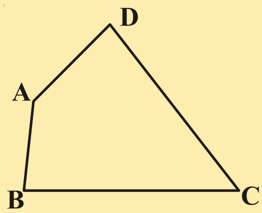


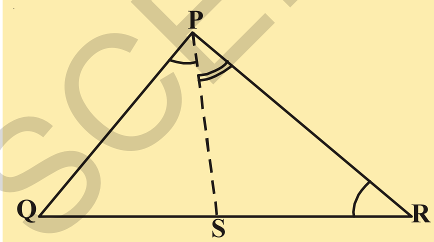


3. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle B < \angle A$ ಮತ್ತು $\angle C < \angle D$ ಆದರೆ $AD < BC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4. ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AB ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹು ಮತ್ತು CD ಅತಿದೊಡ್ಡ ಬಾಹು (ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

   ಆದರೆ $\angle A > \angle C$ ಮತ್ತು $\angle B > \angle D$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.





5. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $PR > PQ$ ಮತ್ತು $\angle QPR$ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆ PS ಆದರೆ $\angle PSR > \angle PSQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು 4ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಮೂರನೇ ಬಾಹು ಅಳತೆಯಾಗಿ ಇರುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ ?
7. 5ಸೆಂ.ಮೀ., 8ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 1ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ. ಈ ರಚನೆ ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಇಲ್ಲವೇ ? ನಿಮ್ಮ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

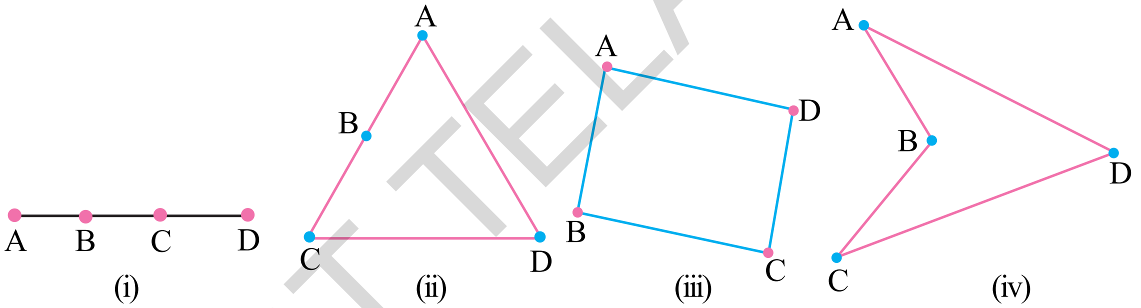
- ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳೆಂದರೆ ಒಂದೇ ಆಕಾರ, ಒಂದೇ ಗಾತ್ರವಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- ಒಂದು ಏಕೈಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಮೂರು ಸ್ವತಂತ್ರ ಅಳತೆಗಳುಬೇಕು.
- ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಇನ್ನೂ, ಅವುಗಳ ಶೃಂಗಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಒಂದು – ಒಂದು ಅನುರೂಪತೆ ಇರುತ್ತದೆ.
- ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮ ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ 'CPCT' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು.
- ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ : ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸಿದ್ಧಾಂತ: ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.
- ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ : ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಲಂ. ಕಂ. ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ: ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಅಸಮವಾಗಿರುವ ಉದ್ದವಾದ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎದುರಿನ ಕೋನವು ದೊಡ್ಡದು.
- ಯಾವ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಾದರೂ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎದುರಿರುವ ಬಾಹು ಉದ್ದದ್ದು.
- ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ರೇಖೆ, ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು LM = LM ರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವದು $\overline{LM}$ = LMರೇಖಾಖಂಡ ಸೂಚಿಸುವದು. $\overrightarrow{LM}$ = LM ಕಿರಣ $\overleftrightarrow{LM}$ = LM ರೇಖೆ

08

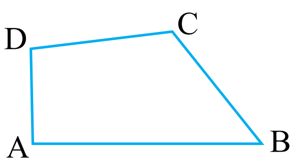
ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

8.1 ಪರಿಚಯ :

ನೀವು ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅವುಗಳ ನಿರೂಪಣೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯನದಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೆ. ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಏಕ ರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೊತೆಯಾಗಿ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಏರ್ಪಡುವ ಆಕೃತಿಯೇ ತ್ರಿಭುಜ. ಆದರೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ಆಕೃತಿ ಯಾವುದೋ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಚಿತ್ರ (i)ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, ಅದು ರೇಖಾಖಂಡ ಆಗುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ (ii)ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ. ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಾಗಿ ಸೇರಿಸಿದರೂ ನಮಗೆ ಬರುವ ಚಿತ್ರಗಳು (iii), (iv) ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಚತುರ್ಭುಜಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

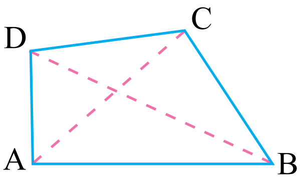


ನೀವು ಎಷ್ಟು ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನಾದರೂ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ನಮ್ಮ ಪರಿಸರಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಲ್ಲಿರಿ. ಚಿತ್ರ (iii) ಮತ್ತು (iv)ಗಳಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಶದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಅದು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ವಿಭಿನ್ನ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೋ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ ?



ನಾವು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ (iii)ರಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಂತಹ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಬಹೀರ್ ವಕ್ರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೆನ್ನುವರು.

ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಆವೃತ್ತ ರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು 'ಚತುರ್ಭುಜ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು AB, BC, CD ಮತ್ತು DA; A, B, C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳು. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಎಂಬುವವು ಶೃಂಗಗಳ ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಟ್ಟ 4 ಕೋನಗಳು.

(A, C) ಮತ್ತು (B, D) ಗಳಂತಹ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಬರುವ AC, BD ಗಳನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

8.2 ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು :

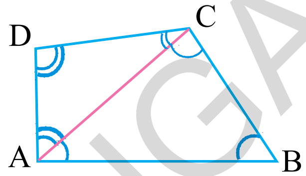
ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ 4 ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆಯೋ ನಾವು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೇ ? "ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ" ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಗುರುತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ AC ಕರ್ಣ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ).

ΔABC ಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

$\angle BAC + \angle B + \angle ACB = 180^o$ ...(1) (ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ΔADC ಯಲ್ಲಿ,



$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^o$ ...(2)

(1) ಮತ್ತು (2), ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$\angle BAC + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^0 + 180^0$

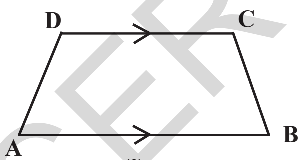
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BAC + \angle CAD = \angle A$ ಮತ್ತು $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$ ಆಗಿದೆ.

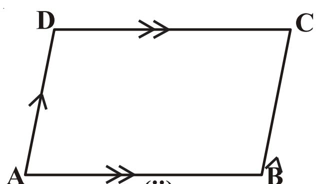
ಅಂದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0 ಅಥವಾ 4 ಲಂಬಕೋನಗಳು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ.

8.3 ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಧಗಳು :

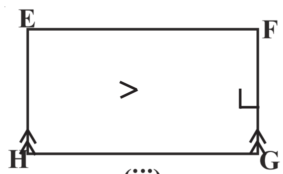
ಕೆಳಗೆ ಎಳೆದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇಂತಹ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಇರುತ್ತೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಚಿತ್ರಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ.



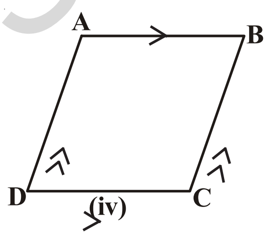
(i)



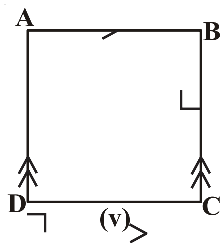
(ii)



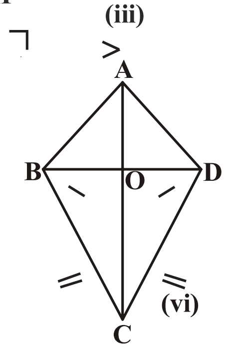
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ ಅಂಶಗಳಿಂದ :

- ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು AB ಮತ್ತು DC ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಇಂತಹ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು **ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
  ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು AB=DC ಗಳ ಸಮಾಂತರಗಳಾಗಿ ಇದ್ದು ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಆದರೆ AD=BC ಅದನ್ನು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇವೆ. ಇಂತಹ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು **ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಚಿತ್ರ (iii), (iv) ಮತ್ತು (v) ಸಹ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೇ.
- ಚಿತ್ರ (iii) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ EFGH ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳು, ಇವುಗಳನ್ನು **ಆಯತ**ಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಚಿತ್ರ (iv) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- ಚಿತ್ರ (v) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಕೋನ 90^0 ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು **ಚೌಕ**
- ಚಿತ್ರ (vi) ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಅಂದರೆ AB = AD ಮತ್ತು BC = CDಆಗಿವೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು **ಗಾಲಿಪಟಾಕೃತಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನಿಷಾ ಹೇಳಿದ್ದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ

ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎನ್ನುವುದು ಚೌಕ ಆಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಆಗದೇ ಹೋಗಬಹುದು ಆದರೂ ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕಗಳು ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳೇ.

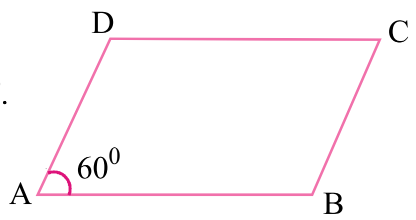
ಲಲಿತ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳು ಜೊತೆ ಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ.

ಎಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳು, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಆಯತಗಳು ಅಲ್ಲ.
ಇವರು ಹೇಳಿದವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದರೊಂದಿಗೆ ನೀವು ಏಕೀಭವಿಸುತ್ತೀರಿ ?
ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ನೀವು ಇಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಉಳಿದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

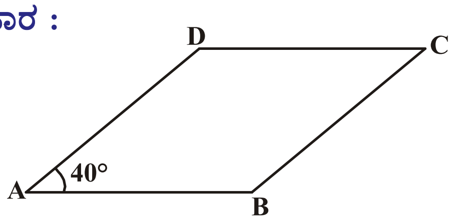
ಉದಾಹರಣೆ -1: ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು $\angle A = 60^o$. ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ.
ಆದ್ದರಿಂದ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.
$\angle C = \angle A = 60^o$ ಮತ್ತು $\angle B = \angle D$
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪಾಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^o.
$\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಗಳು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ
$\angle D = \angle B = 180^o - \angle A$
$= 180^o - 60^o = 120^o$.
ಆದ್ದರಿಂದ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳು 120^o, 60^o, 120^o ಆಗುತ್ತದೆ.



ಉದಾಹರಣೆ-2: ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ $\angle DAB = 40^\circ$ ಆದರೆ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :



ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆದ್ದರಿಂದ

$\angle DAB = \angle BCD = 40^\circ$ ಮತ್ತು AD || BC

ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

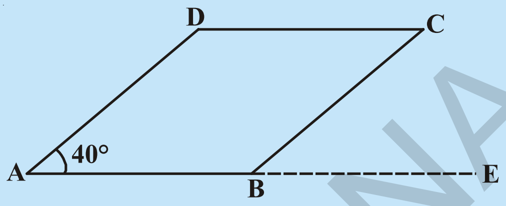
$\angle BAC + \angle DAB = 180^\circ$

$\therefore \angle BAC = 180 - 40^\circ$

$= 140^\circ$

ಇದರಿಂದ $\angle ADC = 140^\circ$ ಮತ್ತು $\angle BCD = 40^\circ$

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ



AB ಯನ್ನು E ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ. $\angle CBE$ ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. $\angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle CBE$ ಎಂತಹ ಕೋನಗಳು ?

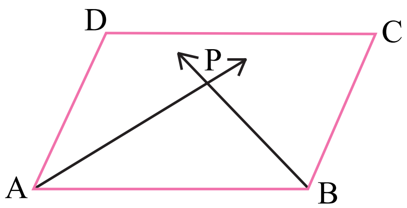
ಉದಾಹರಣೆ-3: ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 3ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆ = 4.5 + 3 + 4.5 + 3 = 15 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ-4: ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು P ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಂಡಿವೆ. ಆದರೆ $\angle APB = 90^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು $\overrightarrow{AP}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{BP}$ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ,



$\angle A + \angle B = 180^\circ$

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180}{2}$

$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^\circ$

Δ APB ಯಲ್ಲಿ

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^\circ$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

$\angle APB = 180^0 - (\angle PAB + \angle PBA)$

$= 180^\circ - 90^\circ$

$= 90^\circ$

ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ..

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1 :

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

   (i) ಪ್ರತಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಆಗುತ್ತದೆ. ( )

   (ii) ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು, ಚತುರ್ಭುಜಗಳೇ. ( )

   (iii) ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳು, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೇ. ( )

   (iv) ಚೌಕ ಎನ್ನುವುದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ( )

   (v) ಪ್ರತಿ ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಸಹ ಒಂದು ಚೌಕ. ( )

   (vi) ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಆಯತಗಳೇ. ( )

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಆಯಾ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ವರ್ತಿಸಿದರೆ 'ಹೌದು' ಎಂದು. ವರ್ತಿಸದಿದ್ದರೆ 'ಅಲ್ಲ 'ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ.

	ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು	ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ	ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	ವಜ್ರಾಕೃತಿ	ಆಯತ	ಚೌಕ
a.	ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಸಮಾಂತರಗಳು	ಹೌದು				
b.	ಎರಡು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳು					
c.	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ					
d.	ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಸಮ					
e.	ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳು					
f.	ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ					
g.	ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ					
h.	ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ					
i.	ಪ್ರತಿ ಕೋನ ಲಂಬಕೋನ					
j.	ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳು					

3. ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ $AB \parallel CD$. $AD = BC$ ಆದರೆ $\angle A = \angle B$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle D$ ಆಗುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
4. ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಅನುಪಾತ 1: 2:3:4. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ABCD ಒಂದು ಆಯತ AC ಕರ್ಣ ಆದರೆ ΔACD ನಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

8.4 ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು :

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೆಂದು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾಗದವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಅದರ ಕರ್ಣದ ಮೂಲಕ ಮತ್ತೆ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಎಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳು ಏರ್ಪಟ್ಟಿವೆ ? ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕುರಿತು ನೀವು ಏನು ಹೇಳುವಿರಿ.

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಇಡಿರಿ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದರೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತಿವೆಯಾ? ಒಂದು ವೇಳೆ ಆಗದಿದ್ದರೆ ಬಾಹುಗಳ ಮೂಲಕ ಸರಿ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದಕ್ಕೆ ಖಚಿತವಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಮತ್ತೇ ಕೆಲವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ನೀವು ಯಾವ ಕರ್ಣವನ್ನಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಇದರಿಂದ ನಾವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಕರ್ಣ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಈಗ ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ-8.1 **:** ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

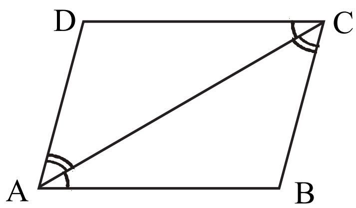
ಸಾಧನೆ **:** ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

A ಮತ್ತು C ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ AC ಕರ್ಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

$AB \parallel DC$ ಮತ್ತು AC ಛೇದನರೇಖೆ ಆದ್ದರಿಂದ

$\angle DCA = \angle CAB$. (ಅಂತರ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $DA \parallel CB$ ಮತ್ತು AC ಛೇದನರೇಖೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle DAC = \angle BCA$ ಆಗಿದೆ.



ಈಗ ΔACD ಮತ್ತು ΔCAB ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle DCA = \angle CAB$ ಮತ್ತು $\angle DAC = \angle BCA$

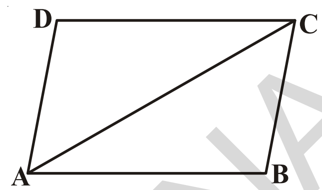
ಹಾಗೆಯೇ $AC = CA$. (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ಆಗಿದೆ.

ಇದರ ಅರ್ಥ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸಿದ್ಧಾಂತದ (ಕೋನ, ಬಾಹು, ಕೋನ) ಪ್ರಕಾರ ಸರ್ವಸಮಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕರ್ಣ AC ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ-8.2 : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : ಕರ್ಣ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\Delta ACD \cong \Delta CAB$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $AB = DC$ ಮತ್ತು $\angle CBA = \angle ADC$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ $AD = BC$ ಮತ್ತು $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle DCB = \angle DAB$

ಇದರಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ

i. ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು.

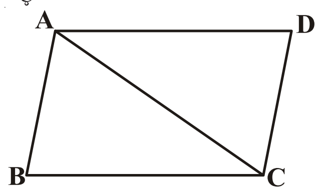
ii. ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಬಹಿರ್ ವಕ್ರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳಾದರೆ, ನಾವು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ.

ಈಗ ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಅದೇನೆಂದರೆ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಸಮ ಆದರೆ ಅದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಪ್ರಮೇಯ-8.3 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಆದರೆ, ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ABCD ಚತುರ್ಭುಜ $AB = DC$ ಮತ್ತು $BC = AD$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ



ಕರ್ಣ AC ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ΔABC ಮತ್ತು ΔCDA ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ನಮಗೆ $BC = AD$, $AB = DC$ ಮತ್ತು $AC = CA$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

ಅದರಿಂದ $\angle BCA = \angle DAC$, AC ಛೇದನರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿರುವುದರಿಂದ

$AB \parallel DC$ ಆಗುತ್ತದೆ. ...(1)

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle ACD = \angle CAB$, CA ಛೇದನರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿರುವುದರಿಂದ

$BC \parallel AD$ ಆಗುತ್ತದೆ. ...(2)

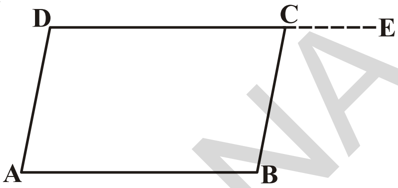
(1) ಮತ್ತು (2) ಇವುಗಳಿಂದ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗಿದೆ.

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವೆಂದು, ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದರೆ, ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದೂ ನಿರೂಪಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ?

ಪ್ರಮೇಯ-8.4 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಸಾಧನೆ: ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle A = \angle C$ ಮತ್ತು $\angle B = \angle D$ ಆದರೆ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360°}{2}$

i.e. $\angle A + \angle B = 180°$

DC ಯನ್ನು E ಕಡೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ

$\angle C + \angle BCE = 180°$ ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BCE = \angle ADC$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\angle BCE = \angle ADC$ ಆದರೆ $AD \parallel BC$ (ಏಕೆ?)

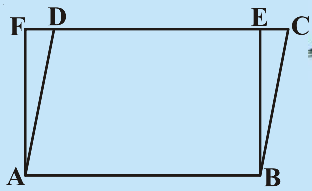
DC ಯನ್ನು ಛೇದನ ರೇಖೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $AB \parallel DC$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

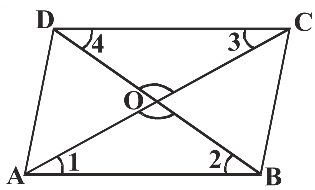
1. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ABEF ಆಯತ ಆದರೆ $\Delta AFD \cong \Delta BEC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಅದನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.
3. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle C$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು 'O' ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಂಡರೆ.

   $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



8.5 ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು :

ಪ್ರಮೇಯ-8.5 : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.



ಸಾಧನೆ : ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು AC ಮತ್ತು BD ಗಳು 'O' ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ.

ΔOAB ಮತ್ತು ΔOCD ಯಲ್ಲಿ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳು $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ ಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬೇಕು.

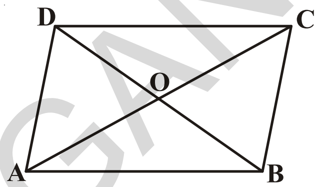
$\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ ಮತ್ತು AC ಛೇದನರೇಖೆ ಉಂಟುಮಾಡಿದ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

$\angle 2 = \angle 4$ (ಹೇಗೆ) (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು AB = CD (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು)
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ತ್ರಿಭುಜದ ಸರ್ವಸಮ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ
$\Delta OCD \cong \Delta OAB$, ಆಗುತತದೆ
ಆದ್ದರಿಂದ CO= OA, DO = OB ಆಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. ನಾವು ಈಗ ಇದರ ವಿಲೋಮ ಸಹ ಸತ್ಯವೋ, ಅಸತ್ಯವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮ ''ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ'' ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ-8.6 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗುತ್ತದೆ.



ಸಾಧನೆ : ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ.
AC, BD ಕರ್ಣಗಳು 'O' ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ.
OA = OC, OB = OD ಆಗುವಂತೆ.
ನಾವು ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

(**ಗಮನಿಸಿ** : ΔAOB ಮತ್ತು ΔCOD ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇನಾ? ಆದರೆ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

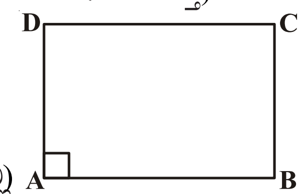
8.5.1 ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳು :

ಈವರೆಗೆ ನಾವು ಸಾಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಲೀ, ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಲೀ ಒಂದು ಚಿತ್ರ (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ) ಆಧಾರವಾಗಿ ರೂಪಿಸಿ. ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ನಡೆದಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಅಳತೆಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಪ್ರತಿಬಾರಿ ನಿರೂಪಿಸುವ ಅವಸರವಿಲ್ಲ. ಪ್ರಮೇಯದ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು, ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಪ್ರಧಾನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಆಗಿಂದಾಗಲೇ ಹೊಸದವುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತೇ ಕೆಲವು ಹೊಸದವುಗಳನ್ನು ಪ್ರದಿಪಾದಿಸಿ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಉಂಟಾಗಿ, ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಉಪಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಿ ವಿವೇಕಾತ್ಮಕದಿಂದ ಸಾದಿಸಬಹುದು.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ-1 : ಆಯತದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

ನಿರೂಪಣೆ : ಆಯತವೆನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ ಲಂಬಕೋನ.
ABCD ಒಂದು ಆಯತ. ಒಂದು ಕೋನ $\angle A = 90^o$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.
ನಾವು $\angle B = \angle C = \angle D = 90^o$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಸ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆದ್ದರಿಂದ AD || BC ಮತ್ತು AB ಛೇದನರೇಖೆ
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A + \angle B = 180^o$ (ಛೇದನರೇಖೆಗೆ ಒಂದೇ ಕಡೆ ಇರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)
ಆದರೆ $\angle A = 90^o$ (ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ)



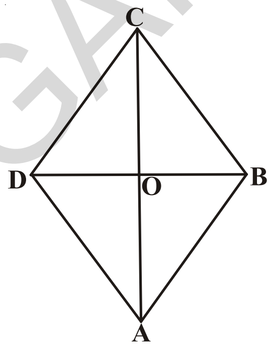
$\therefore \angle B = 180^o - \angle A$
$= 180^o - 90^o = 90^o$
ಈಗ $\angle C = \angle A$ ಮತ್ತು $\angle D = \angle B$ (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ)
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle C = 90^o$ ಮತ್ತು $\angle D = 90^o$ ಆಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ -2 : ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ABCD ಒಂದು ರಾಂಬಸ್ AC ಮತ್ತು BD ಕರ್ಣಗಳು O ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ

ನಾವು AC ಕರ್ಣ, BD ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.



ΔAOB ಮತ್ತು ΔBOC ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

$OA = OC$ (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ)

$OB = OB$ (ΔAOB ಮತ್ತು ΔBOC ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

$AB = BC$ (ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳು)

ಆದರಿಂದ $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AOB = \angle BOC$

ಆದರೆ $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

ಆದ್ದರಿಂದಲೇ $2\angle AOB = 180^\circ$

ಇಲ್ಲವೇ $\angle AOB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

ಈ ವಿಧವಾಗಿ $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ AC ಕರ್ಣ, BD ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ.

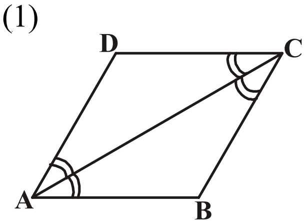
ಉಪಪ್ರಮೇಯ -3 : ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣ AC, $\angle A$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಆಗುತ್ತದೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

ಆದ್ದರಿಂದ $AB \parallel DC$. AC ಛೇದನರೇಖೆ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BAC = \angle DCA$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) ...(1)

$\angle BCA = \angle DAC$ ...(2)



ಆದರೆ ಕರ್ಣ, $\angle A$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore \angle DCA = \angle DAC$ ...(3)

ಆದರಿಂದ AC ಕರ್ಣ $\angle C$ ಯನ್ನು ಸಹ ಅರ್ಧಿಸಿದೆ.

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ಗಳಿಂದ, ನಮಗೆ

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle BAC = \angle BCA$ ಎಂದರೆ $BC = AB$ (ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ)

ಆದರೆ $AB = DC$ ಮತ್ತು $BC = AD$ (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು)

$\therefore\ AB = BC = CD = DA$

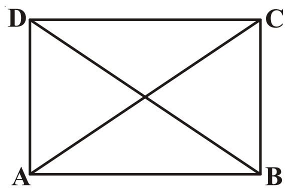
ಈ ವಿಧವಾಗಿ ABCD ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ - 4 : ಆಯತದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ABCD ಆಯತದಲ್ಲಿ AC ಮತ್ತು BD ಅವುಗಳ ಕರ್ಣಗಳು.

ನಮಗೆ $AC = BD$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ABCD ಆಯತವೆಂದರೆ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಕೋನ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ.



ΔABC ಮತ್ತು ΔBAD ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$AB = BA$ (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

$\angle B = \angle A = 90^o$ (ಆಯತದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಕೋನ)

$BC = AD$ (ಆಯತದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು)

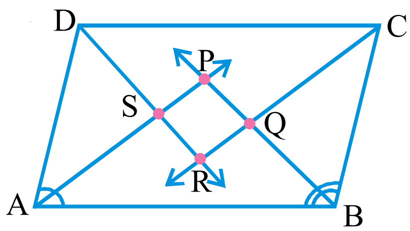
ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ) ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ $AC = BD$

ಇಲ್ಲವೇ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ -5 : ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತೇವೆಂದು ತೋರಿಸಿ

ಪರಿಹಾರ: ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು P, Q, R, S ಗಳ ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಂಡು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿವೆ. (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ)



ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $AD \parallel BC$, AB ನ್ನು ಛೇದನರೇಖೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\angle BAD + \angle ABC = 180^o$ (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು)

ಆದರೆ $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BAD$ ಮತ್ತು $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle B$

[AP ಮತ್ತು BP ಗಳು $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಗಳು]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\times 180^o$$

ಇಲ್ಲವೇ $\angle BAP + \angle ABP = 90^o$ ...(1)

ಆದ್ದರಿಂದ ΔAPB ಯಲ್ಲಿ

$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^\circ$ (ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle APB = 180^o - (\angle BAP + \angle ABP)$

$\Rightarrow \angle APB = 180^o - 90^o$ ((1) ರಿಂದ)

$= 90^o$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ $\angle SPQ = \angle APB = 90^\circ$ ಆಗಿದೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle CRD = \angle QRS = 90^\circ$ (ಒಂದೇ ಕೋನ)

ಆದರೆ $\angle BQC = \angle PQR$ ಮತ್ತು $\angle DSA = \angle PSR$ (ಏಕೆ?)

$\therefore \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^\circ$

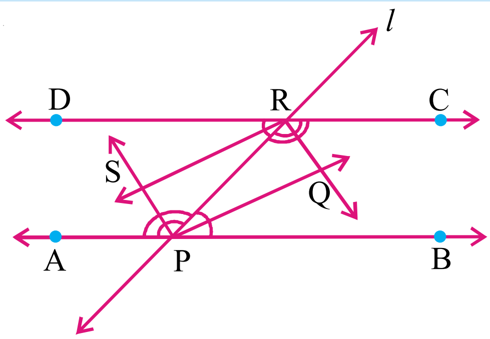
ಆದ್ದರಿಂದ PQRS ನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು 90° ಗೆ ಸಮಾನ.

ಆದ್ದರಿಂದ PQRS ನ್ನು ಆಯತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :

1. ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣಗಳು ಅದನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು



ಉದಾಹರಣೆ-5: $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{DC}$ ಗಳು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಛೇದನರೇಖೆ l, $\overleftrightarrow{AB}$ ನ್ನು P ಬಳಿ $\overleftrightarrow{DC}$ ನ್ನು R ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ. ಆದರೆ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಆಯತವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, ಛೇದನರೇಖೆ l, $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು P ಬಳಿ $\overleftrightarrow{DC}$ ಯನ್ನು R ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ.

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{PS}$ ಗಳು $\angle RPB, \angle CRP, \angle DRP$ ಮತ್ತು $\angle APR$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$\angle BPR = \angle DRP$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) ...(1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{ಆದರೆ } \angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR \quad (\because \overrightarrow{PQ}, \angle BPR \text{ ನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ}) \\ \text{ಹಾಗೆಯೇ } \angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP \quad (\because \overrightarrow{RS} \ \angle DPR \text{ ನ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ}). \end{array}\right\} \quad ...(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಗಳಿಂದ

$\angle RPQ = \angle PRS$

ಇವು $\overline{PR}$ ಛೇದನರೇಖೆಯಾಗಿ $\overrightarrow{PQ}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{RS}$ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು, ಆದ್ದರಿಂದ

$\therefore \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle PRQ = \angle RPS$, ಆದ್ದರಿಂದ $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{RQ}$

ಆದ್ದರಿಂದ PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗಿದೆ ... (3)

ನಮಗೆ $\angle BPR + \angle CRP = 180^\circ$

(ಛೇಧನರೇಖೆ (l)ಗೆ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ ಕೋನಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$)

$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^\circ$

ಆದರೆ Δ PQR ನಲ್ಲಿ

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^\circ$ (ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳು)

$\angle PQR = 180^\circ - (\angle RPQ + \angle PRQ)$

$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ... (4)

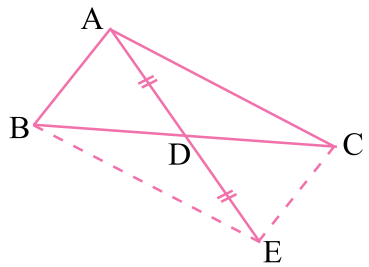
(3) ಮತ್ತು (4) ಗಳಿಂದ

PQRS ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಕೋನ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ PQRS ಒಂದು ಆಯತ.

ಉದಾಹರಣೆ-6: ABCಯಲ್ಲಿ, BC ಬಾಹುವಿಗೆ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AD ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. AD = ED ಆಗುವಂತೆ E ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ABEC ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : Δ ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AD ಮಧ್ಯರೇಖೆ.



AD = ED ಆಗುವಂತೆ ADಯನ್ನು E ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

BE ಮತ್ತು CE ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

Δ^s ABD ಮತ್ತು ECD ಗಳಲ್ಲಿ

BD = DC (BCಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D)

$\angle ADB = \angle EDC$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

AD = ED (ಕೊಡಲಾಗಿದೆ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ ಆಗಿದೆ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಆದರಿಂದ AB = CE (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)

ಹಾಗೆಯೇ $\angle ABD = \angle ECD$

ಇವು $\overleftrightarrow{BC}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ $\overleftrightarrow{CE}$ ಛೇದನರೇಖೆ ಉಂಟು ಮಾಡಿದ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

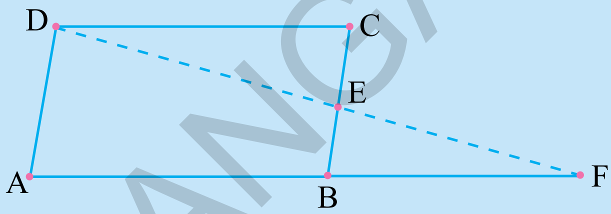
ABEC ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ

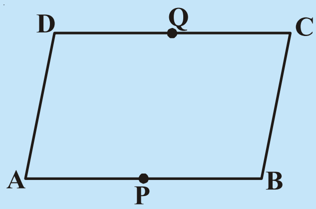
AB || CE ಮತ್ತು AB = CE

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ABEC ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗಿದೆ.

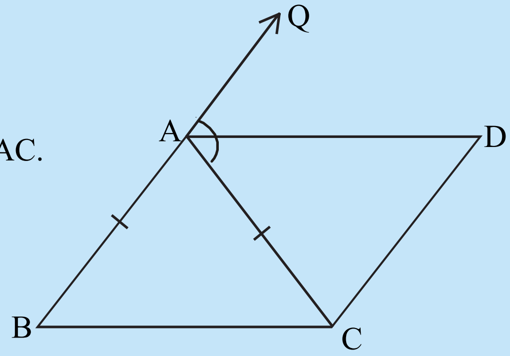
ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು $(3x - 2)^o$ ಮತ್ತು $(x + 48)^o$. ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನ, ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟುಗಿಂತ 24^o ಕಡಿಮೆ ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು E . DE ಮತ್ತು AB ಗಳನ್ನು F ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದರೆ, AF = 2AB ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

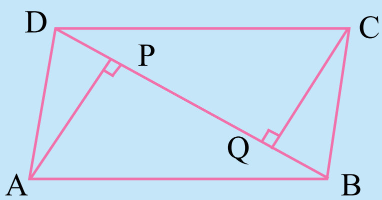




4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. AB, DC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಆದರೆ PBCQ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ?

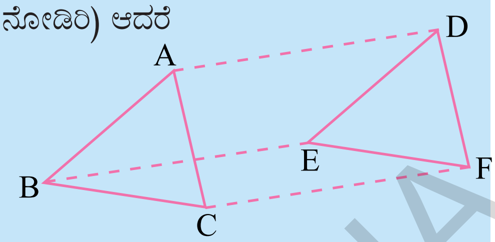


5. ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು AB = AC. ಬಾಹ್ಯಕೋನ QAC ಯನ್ನು AD ಅರ್ಧಿಸಿದೆ ಮತ್ತು CD || BA ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ , ಆದರೆ
   (i) $\angle DAC = \angle BCA$
   (ii) ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

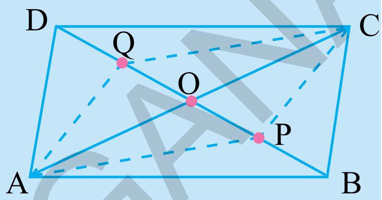


6. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ AP ಮತ್ತು CQಗಳ ಶೃಂಗಗಳು A ಮತ್ತು C ನಿಂದ ಕರ್ಣ BD ಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳು (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ
   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$
   (ii) AP = CQ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. Δ^s ABC ಮತ್ತು DEF ಗಳಲ್ಲಿ AB = DE; BC = EF ಮತ್ತು BC || EF. ಶೃಂಗಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ D, E ಮತ್ತು F ಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸ್ಪಟ್ಟಿವೆ (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ
   (i) ABED ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ
   (ii) BCFE ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ
   (iii) AC = DF
   (iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



8. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. AC ಮತ್ತು BD ಗಳು 'O' ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. P, Q ಗಳು BD ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ತ್ರಿಥಾಕರಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ. CQ || AP ಮತ್ತು AC ಕರ್ಣ PQ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ)



9. ABCD ಒಂದು ಚೌಕ. E, F, G ಮತ್ತು H ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು AE = BF = CG = DH ಆದರೆ EFGH ಒಂದು ಚೌಕವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

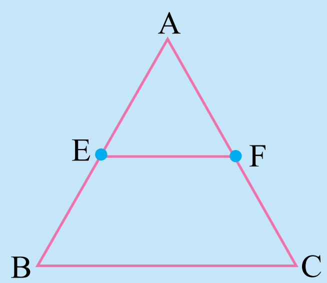
8.6 ತ್ರಿಭುಜ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯ :

ನಾವು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ತ್ರಿಭುಜಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಾವು ಮತ್ತೇ ಕೆಲವು ಹೊಸ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ABC ತ್ರಿಭುಜ ಎಳೆಯಿರಿ. $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{AC}$ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ EF ಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ EF ಅಳತೆಯನ್ನು, ಮೂರನೇ ಬಾಹು BC ಅಳತೆಯನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle AEF$ ಮತ್ತು $\angle ABC$ ಕೋನಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ..



ನಮಗೆ $\angle AEF = \angle ABC$ ಮತ್ತು $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

ಈ ಕೋನಗಳು EF ಮತ್ತು BC ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಛೇದನರೇಖೆ AB ಯಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು EF || BC ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

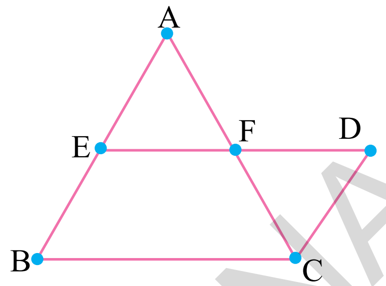
ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ..

ಇದರಿಂದ ನಾವು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ-8.7 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಎಳೆದ ರೇಖೆ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಮತ್ತು AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು F

ಸಾಧನೀಯ : (i) EF || BC (ii) $EF = \frac{1}{2} BC$



ಸಾಧನೆ : EF ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ, BA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ C ನಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಅದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ ರೇಖೆಯನ್ನು D ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

Δ^s AEF ಮತ್ತು ΔCDF ಗಳಲ್ಲಿ

AF = CF (AC ಮಧ್ಯಬಿಂದು)

$\angle AFE = \angle CFD$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು $\angle AEF = \angle CDF$ (CD || BA ನೊಂದಿಗೆ ED ಛೇದನರೇಖೆ ಉಂಟು ಮಾಡಿದ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸರ್ವಸಮ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಪ್ರಕಾರ

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta CDF$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ AE = CD ಮತ್ತು EF = DF (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)

AE = BE ಎಂದು ನಮಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ BE = CD ಆಗಿದೆ.

BE || CD ಮತ್ತು BE = CD ಆದ್ದರಿಂದ BCDE ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗಿದೆ

ಆದ್ದರಿಂದ ED || BC

$\Rightarrow$ EF || BC

BCDE ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆದ್ದರಿಂದ ED = BC(ಏಕೆ?) ($\because$ DF = EF)

FD = EF ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರಿಂದ

$\therefore$ 2EF = BC ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದರಿಂದ $EF = \frac{1}{2} BC$ ಆಗಿದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವು ಸಹ ಸತ್ಯವೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿ ಹೇಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

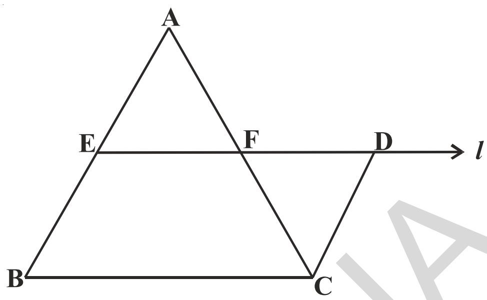
ಪ್ರಮೇಯ -8.8 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ΔABCಎಳೆಯಿರಿ. ABಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿ E ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Eಮೂಲಕ BCಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ 'l' ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇದು ACಯನ್ನು F ಬಳಿ ಕತ್ತಿರಿಸಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

CD || BA ನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

ನಾವು AF = CF ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ ΔAEF ಮತ್ತು ΔCFD ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.



$\angle EAF = \angle DCF$ (BA $\|$ CD ಮತ್ತು AC ಛೇದನರೇಖೆ) (ಹೇಗೆ?)

$\angle AEF = \angle D$ (BA $\|$ CD ಮತ್ತು ED ಛೇದನರೇಖೆ) (ಹೇಗೆ?)

ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿ ತೋರಿಸಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಇವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳೆಂದು ಹೇಳಲಾರೆವು.

ಆದ್ದರಿಂದ EB $\|$ DC ಮತ್ತು ED $\|$ BC ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ EDCB ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗಿದೆ ಇದರಿಂದ BE = DC ಆಗಿದೆ.

ಆದರೆ BE = AE ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ AE = DC ಎಂದು ಬಂದಿದೆ.

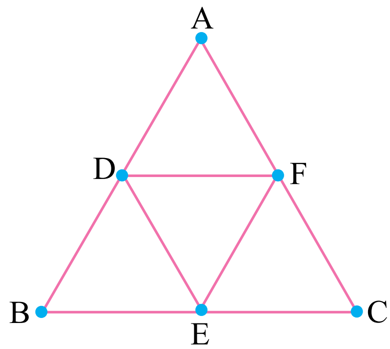
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ

$\Delta AEF \cong \Delta CFD$ ಆಗಿದೆ.

$\therefore$ AF = CF ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ -7: ΔABC ಯಲ್ಲಿ D, E ಮತ್ತು F ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC ಮತ್ತು CA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ಒಂದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : ABC ಯಲ್ಲಿ D, E ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\overline{AB}$ ಮತ್ತು BC ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

DE $\|$ AC

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ DF $\|$ BC ಮತ್ತು EF $\|$ AB ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ADEF, BEFD ಮತ್ತು CFDE ಗಳ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು.

ಈಗ ADEF ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ DF ಕರ್ಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ADF \cong \Delta DEF$ (ಕರ್ಣ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದೆ)

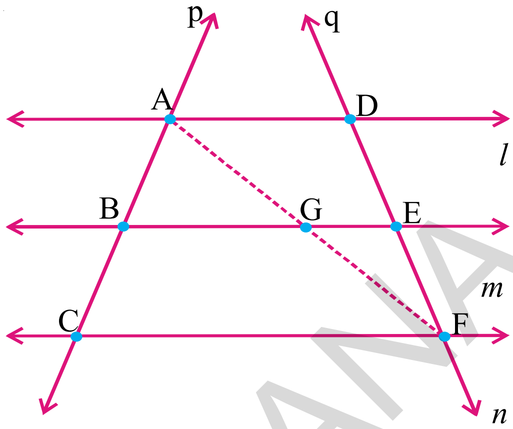
ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

ಮತ್ತು $\Delta CEF \cong \Delta DEF$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

ಇದರಿಂದ "ತ್ರಿಭುಜ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಸರ್ವಸಮ"ವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ -8: l, m ಮತ್ತು n ಎಂಬ ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು p ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಎರಡು ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳು A, B, C ಮತ್ತು D,E, F ಗಳ ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತಿವೆ. ಛೇದನರೇಖೆ p, ಈ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಅಂತರ್ ಖಂಡಗಳು AB, BC ಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ q ಛೇದನ ರೇಖೆಯೂ ಸಹ ಸಮಾನ ಅಂತರ ಖಂಡಗಳು DE ಮತ್ತು EF ಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ: AB, BC ಮತ್ತುDE, EF ಗಳ ಮಧ್ಯ ಸರ್ವಸಮತೆ ಭಾವನೆಗೆ ಸಮನ್ವಯಗೊಳಿಸಬೇಕು. A ಯಿಂದ F ಗೆ ರೇಖೆ ಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು 'm' ರೇಖೆಯನ್ನು G ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ΔACF ನಲ್ಲಿ AB = BC (ದತ್ತಾಂಶ)

ಆದ್ದರಿಂದ AC ಮಧ್ಯಬಿಂದು B.

ಮತ್ತು BG || CF (ಹೇಗೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ AF ನ ಮಧ್ಯೆಬಿಂದುವು G ಆಗಿದೆ. (ತ್ರಿಭುಜ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯ).

ಈಗ Δ AFD ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ G ಎನ್ನುವುದು AF ಗೆ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

ಮತ್ತು GE || AD ಆದ್ದರಿಂದ DF ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆಗುತ್ತದೆ.

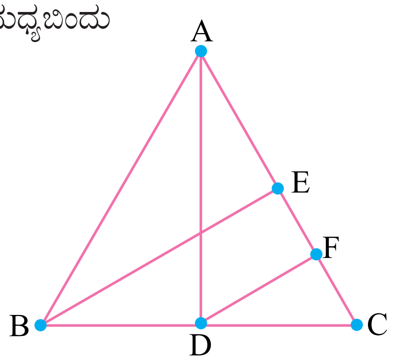
ಇದರ ಮೂಲವಾಗಿ DE = EF ಆಗಿದೆ.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ l, m ಮತ್ತು n ರೇಖೆಗಳು q ಛೇದಕರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಹ ಸಮಾನ ಅಂತರ ಖಂಡಗಳು ಉಂಟುಮಾಡಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ -9: ΔABC ಯಲ್ಲಿ AD ಮತ್ತು BE ಗಳು ಎರಡು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು BE || DF

(ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ) ಆದರೆ CF = $\frac{1}{4}$ AC ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ BC ಮಧ್ಯಬಿಂದು D ಮತ್ತು BE || DF ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ CE ಮಧ್ಯಬಿಂದು F ಆಗುತ್ತದೆ..



$\therefore$ CF = $\frac{1}{2}$CE

= $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\text{AC}\right)$ (ಹೇಗೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ CF = $\frac{1}{4}$AC .

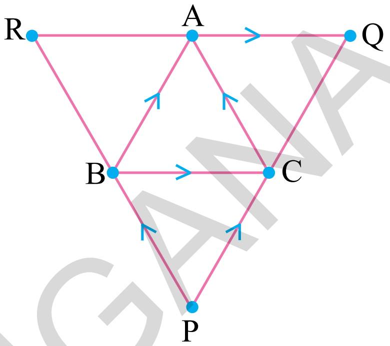
ಉದಾಹರಣೆ -10 : ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ BC, CA ಮತ್ತು AB ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ A, B ಮತ್ತು C ಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಎಳೆದರೆ ಅವು P, Q ಮತ್ತು R ಬಳಿ ಕತ್ತಿರಿಸಿಕೊಂಡಿವೆ. ΔPQR ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ ΔABC ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಎರಡರಷ್ಟು ಇರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : AB || QP ಮತ್ತು BC || RQ ಆದ್ದರಿಂದ ABCQ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ BCAR, ABPC ಗಳು ಸಹ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

$\therefore$ BC = AQ ಮತ್ತು BC = RA

$\Rightarrow$ QR ಮಧ್ಯಬಿಂದು A ಆಗುತ್ತದೆ.



ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ B, C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ PR ಮತ್ತು PQ ಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

$\therefore$ AB $= \frac{1}{2}$PQ; BC $= \frac{1}{2}$QR ಮತ್ತು CA $= \frac{1}{2}$PR (ಹೇಗೆ?)

(ಸಂಬಂಧಿತ ಪ್ರಮೇಯ ತಿಳಿಸಿರಿ)

ಈಗ ΔPQR ಸುತ್ತಳತೆ = PQ + QR + PR

= 2AB + 2BC + 2CA

= 2(AB + BC + CA)

= 2 (ΔABC ಯ ಸುತ್ತಳತೆ).

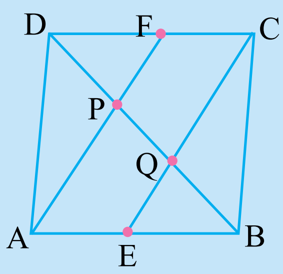
ಅಭ್ಯಾಸ 8.4

1. ABCತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AB ಯ ಮೇಲೆ D ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು AD $= \frac{1}{4}$AB ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ AC ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು E ಮತ್ತು AE $= \frac{1}{4}$AC. DE = 2 ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ BC ಎಷ್ಟು ?

2. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E, F, G ಮತ್ತು H ಗಳು ಆದರೆ EFGH ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ ?

3. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಏರ್ಪಡುವ ಚಿತ್ರ ಆಯತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ?

4. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ AB, DC ಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆದರೆ AF ಮತ್ತು EC ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಕರ್ಣ BD ಯನ್ನು ತ್ರಿಧಾಕರಿಸುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ ?



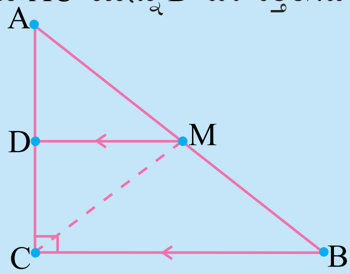
5. ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ ?

6. ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ C ಲಂಬಕೋನ. ಕರ್ಣ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಮೂಲಕ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆ AC ಯನ್ನು D ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

   (i) AC ಮಧ್ಯಬಿಂದು D

   (ii) MD $\perp$ AC

   (iii) CM = MA $= \frac{1}{2}$AB .

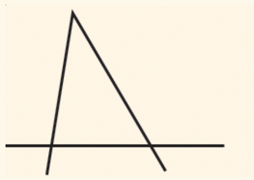


ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

1. ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಆವೃತ ರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
2. ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0 ಅಥವಾ 4 ಲಂಬಕೋನಗಳು.
3. ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ವಜ್ರಾಕೃತಿ, ಆಯತ, ಚೌಕ ಮತ್ತು ಗಾಳಿ ಪಟಾಕೃತಿ ಎಂಬುವವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು.
4. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚತುರ್ಭುಜ ಇವುಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯದ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ.
   a) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕರ್ಣ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
   b) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.
   c) ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.
   d) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.
   e) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.
   f) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.
5. ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯ, ಅದರ ವಿಲೋಮ
   a) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಎಳೆದ ರೇಖೆ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆ.
   b) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆ, ಮೂರನೇ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

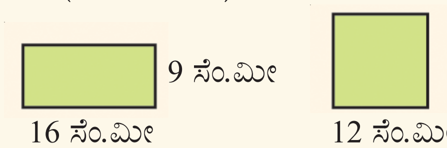
ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಗೆ ಪರೀಕ್ಷೆ

1. ತ್ರಿಭುಜದ ಪದಬಂಧವನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿರಿ.



ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಮತ್ತೆರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಜೊತೆ ಮಾಡಿದರೆ 10 ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಬರಬೇಕು.

2. 16 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದ, 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಗಲವಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳು (ಎರಡೇ ಎರಡು) ಮಾಡಿ ಚೌಕವಾಗಿ ಸೇರಿಸಿ –ಚೌಕವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ



09 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

9.1 ಪರಿಚಯ

ಒಂದು ದಿನ ಸೋಮು, ಆವರ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕನ ಮನೆಗೆ ಹೋದನು. ಅ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕನು ಭಾರತ ದೇಶ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಗಣನೆಗೋಸ್ಕರ ತಾನು ಶೇಖರಿಸಿದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ.

ಸೋಮು : ನಮಸ್ಕಾರ ಸಾರ್! ನೀವು ಕೆಲಸದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೆ ಇದೆ. ನಿಮ್ಮ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ನಾನೇನಾದರೂ ಸಹಾಯ ಮಾಡಬಹುದೇ?

ಶಿಕ್ಷಕ: ಬಾ! ಸೋಮು , ಜನಗಣತಿಗೋಸ್ಕರ ಕುಟುಂಬ ವಿವರಗಳು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ್ದೇನೆ ಅಲ್ಲವೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿನ ಸದಸ್ಯರು ಎಷ್ಟು? ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು? ಕುಟುಂಬದ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟು? ಮೊದಲಾದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿದ್ದೇನೆ.

ಸೋಮು : ಈ ಸಮಾಚಾರದ ಉಪಯೋಗವೇನು?

ಶಿಕ್ಷಕ : ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಸರ್ಕಾರವು ಯೋಜನಾ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಕೆಲಸಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಸಂಪನ್ಮೂಲ ಹಂಚಿಕೆಗೆ, ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಗಳಿಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಸೋಮು : ಸರ್ಕಾರ ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತದೆ?

ಶಿಕ್ಷಕ : ಸರ್ಕಾರಿ ಅಧಿಕಾರಿಗಳು ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆಯಲ್ಲಿನ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಹೊಸ ಅಂದಾಜುಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ನೀವು ಸಹ ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೆ! ಇದೇ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ.

ಸೋಮು ಹಾಗೆ ನಾವು ಸಹ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ, ಪ್ರತಿದಿನಗಳ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆ ಬಗ್ಗೆ, ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಸ್ಕೋರ್ ಬಗ್ಗೆ ಇಲ್ಲವೇ ಚುನಾವಣೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಮಚಾರವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ, ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ, ಕೋಷ್ಟಕಗಳಾಗಿ, ನಕ್ಷೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೋಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಅಲ್ಲವೆ. ಈಗೆ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಶೇಖರಿಸಿದ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಅರ್ಥವಂತವಾಗಿ ಮಾಡುವ ಗಣಿತ ವಿಭಾಗ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ.

ನಾವು ಈಗ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ (ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ) ಅಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

9.2 ದತ್ತಾಂಶ ಶೇಖರಣೆ

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಕ್ಷ್ಯದಿಂದ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಶೇಖರಿಸುವುದು ಪ್ರಧಾನ ಹಂತ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಗ್ರಹಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆ ಮೂಲಕ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ, ಒಂದೊಂದು ಗುಂಪಿಗೆ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಶೇಖರಣೆಗೆ ನೇಮಿಸಿದ್ದೇನೆ.

i. ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕ.

ii. ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ(ಸೋದರ ಅಥವಾ ಸೋದರಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ) ಒಡಹುಟ್ಟಿದವರ ಸಂಖ್ಯೆ.

iii. ಕಳೆದ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿದಿನದ ಗೈರು ಹಾಜರಾದವರ ಸಂಖ್ಯೆ.

iv. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಮನೆಯಿಂದ ಶಾಲೆಗೆ ಇರುವ ದೂರ.

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಪದ್ಧತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

1. ವಿವರಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೋಸ್ಕರ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿ ಇಲ್ಲವೇ ಸ್ವತಃ ಅವರ ಮನೆಗೆ ಹೋಗಿ ವಿವರಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೀರಾ?
2. ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ರಿಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಮತ್ತೆ ಯಾವುದಾದರೂ ರಿಕಾರ್ಡುಗಳಿಂದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ್ದೀರಾ?

ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ (i), ((ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೋಸ್ಕರ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಭೇಟಿಮಾಡಿ ವಿವರಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಗಳನ್ನು ಮೂಲದಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ್ದಾರೋ ಅದನ್ನು **ಪ್ರಾಥಮಿಕ ದತ್ತಾಂಶ** (Primary Data)ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iii) ನೆ ದತ್ತಾಂಶಗೋಸ್ಕರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದಲ್ಲದೆ ಅದಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆಯೇ ಪ್ರತಿದಿನವೂ ಹಾಜರಾತಿ ವಿವರಗಳನ್ನು ರಿಕಾರ್ಡು ಮಾಡಿದ ಹಾಜರಾತಿ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಮೊದಲೇ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶ ಇಲ್ಲವೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು '**ಅನುಷಂಗಿಕ ದತ್ತಾಂಶ** '(Secondary Data) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ, ಯಾವುದು ಅನುಷಂಗಿಕ ದತ್ತಾಂಶ?

i. 2001 ರಿಂದ 2010ವರೆಗೆ ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ನಮೂದಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಿವರಗಳು?

ii. ವ್ಯಾಯಾಮ ಶಿಕ್ಷಕನು ನಮೂದು ಮಾಡಿದ ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳು.

9.3 ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಪ್ರದರ್ಶನೆ

ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ನಂತರ ವಿಶ್ಲೇಷಕನು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಅದನ್ನು ಅರ್ಥವಂತವಾಗಿ, ಸಮಗ್ರವಾಗಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವುದು ಎರಡನೇ ಮುಖ್ಯ ಹಂತ. ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವಂತಹ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 15 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು (ಗರಿಷ್ಠ 50) ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7.

ಇಂತಹ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಳು ಇಲ್ಲವೇ ಮೌಲ್ಯಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಪ್ರಕಟಿಸುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು '**ಕಚ್ಚಾ ದತ್ತಾಂಶ** ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಕನಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ, ಗರಿಷ್ಟಬೆಲೆಗಳಿಗಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಗರಿಷ್ಟ, ಕನಿಷ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದ '**ವ್ಯಾಪ್ತಿ**' ಎನ್ನುವರೆಂದು ನಿಮಗೆ ಜ್ಞಾಪಕವಿರಬಹುದು.

ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಗರಿಷ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ - ಕನಿಷ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ

ಆದ್ದರಿಂದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ = 50 – 7 = 43,

ಅಂದರೆ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಮೌಲ್ಯಗಳೆಲ್ಲವೂ 7, 50 ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ.

ಈ ದತ್ತಾಂಶದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ

i. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾವುದು?

ii. 60% ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು?

ಚರ್ಚೆ

(i) ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಟ ಅಂಕಗಳು 50 ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯದ ಮೌಲ್ಯ 25 ಎಂದು ಇಕ್ರಮ್ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಪಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಮೇರಿ ಇದು ಸರಿಯಾದ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ನಿಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವೇನು?

ಈ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ 15 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 8ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 34 ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ (ಮಧ್ಯಾಂಕ) ಆಗುತ್ತದೆ.

(ii) 50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ 60% (ಅಂದರೆ $\frac{60}{100} \times 50 = 30$).

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ (60%) 30 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 9 ಮಂದಿ.

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಇದ್ದಾಗ, ಅವುಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಲು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧವಾಗಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ -1: ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 50 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

5, 8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6, 7, 10, 2, 1, 1, 3, 4,4, 5, 8, 6, 7, 10,
2,8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6,4, 5, 8

ಅಂಕಗಳು	ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1	卌 |	6
2	卌 |	6
3	|||	3
4	卌 ||||	9
5	卌 ||	7
6	卌	5
7	||	2
8	卌 |	6
9	||	2
10	||||	4
	ಒಟ್ಟು	50

ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಅಂಕವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆ ಅಂಕದ ಆವೃತ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 4 ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 9, ಅಂದರೆ 4 ಅಂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿ 9.

ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳನ್ನು ಕಚ್ಚಾ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತವೆ.

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಒಟ್ಟು ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು 'ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ'ಇಲ್ಲವೇ 'ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಭಾರತ್ವ ಪಟ್ಟಿ'ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನೆ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ(ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ) ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ.

(i) ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನೆ ಹೆಸರುಗಳ ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರ ಯಾವುದು?

(ii) ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನೆ ಹೆಸರಿನ ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರ 'I' ಯಾಗಿದೆ?

(iii) ಯಾವ ಅಕ್ಷರ ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಬಾರಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ?

ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಅಂದರೆ (i) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ ಹಾಜರಾಗಬೇಕಾದವರು (ii) ಸಾಧಾರಣ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು (iii) ಬಹಳ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಓದುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಂಬ ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ವರ್ಗಾಂತರ (ಅಂಕಗಳು)		ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1 - 3	(ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗುಂಪು)	卌 卌 卌	15
4 - 5	(ಸಾಧಾರಣ ಗುಂಪು)	卌 卌 卌 |	16
6 - 10	(ಚೆನ್ನಾಗಿ ಓದುವವರ ಗುಂಪು)	卌 卌 卌 ||||	19

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಇದ್ದಾಗ ಸಮಾಚಾರ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸುವಿಕೆ ಸಹ ಈ ವಿಧವಾದ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಎಷ್ಟೋ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ -2 : ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 50 ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಬಿಡಿ , ಬಿಡಿ ತೂಕಗಳು (ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಗ್ರವಾಗಿ, ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ, 30-39, 40-49, 50-59, ... 100-109, 110-119 ಯಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದೊಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 'ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವರ್ಗಾಂತರ 30-39 ರಲ್ಲಿ 30 ಮತ್ತು '39 ಒಳಗೊಂಡಂತೆ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ10. ಇದೇ ವರ್ಗಾಂರದ ಗಾತ್ರ. 30ನ್ನು ಕೆಳಮಿತಿ ಎಂದೂ , 39 ನ್ನು ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ 10(ಕೆಳಮಿತಿ , ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಒಳಗೊಂಡಂತೆ)

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು (ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ತೂಕ)	ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ (ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ಸಂಖ್ಯೆ)
30 - 39	卌 I	6
40 - 49	卌 III	8
50 - 59	卌 IIII	9
60 - 69	卌 I	6
70 - 79	III	3
80 - 89	卌	5
90 - 99	卌 II	7
100-109	III	3
110 - 119	III	3
	ಒಟ್ಟು	50

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು 'ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಮಗ್ರವಾಗಿ, ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿಯು ಇನ್ನೊಂದು (ಮುಂದಿನ) ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿಲ್ಲ. ಆಯಾ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿಯನ್ನು ಅದೇ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲಾಗುವುದು. ಇಂತಹ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು 'ಸಂವೃತ ವರ್ಗಾಂತರ' (Inclusive Interval) ಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ

ವರ್ಗಾಂತರ ಮಿತಿಗಳು	ವರ್ಗಾಂತರ ಸರಿಹದ್ದುಗಳು
20 - 29	
30 - 39	29.5 - 39.5
40 - 49	39.5 - 49.5
50 - 59	49.5 - 59.5
60 - 69	59.5 - 69.5
70 - 79	69.5 - 79.5
80 - 89	79.5 - 89.5
90 - 99	89.5 - 99.5
100 - 109	99.5-109.5
110 - 119	109.5-119.5
120 - 129	

ಯಾವ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಾದರೂ ಹೆಚ್ಚು ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರದಿಂದ ಕಡಿಮೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಕಡಿಮೆ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರದಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದರೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಮಾತ್ರ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಅತಿಪಾತ ಹೊಂದಬಾರದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮೊದಲು ದತ್ತಾಂಶದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ (ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ - ಕನಿಷ್ಠ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ)ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ ಮತ್ತು ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 30-35, 36-40...ಯಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ಭಾರ 39.5 ಗ್ರಾಂ ಆದರೆ ಆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು? 30-39 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೇ 40-49 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿಯೇ?

ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ 'ನೈಜ ಮಿತಿಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಸರಹದ್ದುಗಳು' ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ , ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅದೇ ಬೆಲೆ ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದು ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸರಹದ್ದುಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿನ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರ ಊಹಿಸುವ ಮೂಲಕ ಮೊದಲನೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದನ್ನು, ಅದೇ ರೀತಿ ಕೊನೆ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ನಂತರ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರ ವನ್ನು ಊಹಿಸುವ ಮೂಲಕ ಕೊನೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಸರಹದ್ದುಗಳು ಏರ್ಪಡಿಸಿದ ನಂತರ ಸಹ 39.5 ನ್ನು ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ 29.5 – 39.5 ಇಲ್ಲವೇ 39.5–49.5 ಸೇರಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಸಂಶಯ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕವಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದು ಆ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ 39.5 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 39.5–49.5 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ.

30-40,40-50,50-60,... ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅತಿಪಾತ ಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು 'ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು' (Exclusive Interval) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಸಂವೃತ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸರಹದ್ದುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಏರ್ಪಟ್ಟಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳ ಸರಹದ್ದುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ. ಆದ್ದರಿಂದ 90–99 ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ 10. (i.e. 99.5 – 89.5 = 10) 10.

ಉದಾಹರಣೆ –3: ಸೆಪ್ಟಂಬರ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಗರದ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆರ್ದತೆ (ಶೇಕಡಗಳಲ್ಲಿ) ಬೆಲೆಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (ಏಕೆಂದರೆ 99.5–89.5 = 10)

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) 84-86, 86,-88 – ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ.

(ii) ದತ್ತಾಂಶದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : (i) ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ತಾಳೆಗುರುತುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ವರ್ಗೀಕೃತ 'ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ.

ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆರ್ದತೆ	ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ (ದಿನಗಳು)
84-86	|	1
86-88	|	1
88-90	||	2
90-92	||	2
92-94	$\cancel{||||}$ ||	7
94-96	$\cancel{||||}$ |	6
96-98	$\cancel{||||}$ ||	7
98-100	||||	4

[ಸೂಚನೆ : ದತ್ತಾಂಶ 90;90–92 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ 96;96–98 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ]

(ii) ದತ್ತಾಂಶದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಗರಿಷ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ – ಕನಿಷ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ

= 99.2 -84.9 =14.3

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು, ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	5ವರೆಗೆ	6ವರೆಗೆ	7ವರೆಗೆ	8ವರೆಗೆ	9ವರೆಗೆ	10ವರೆಗೆ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	11	19	31	40	45

2. 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ 36 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ರಕ್ತದ ಗುಂಪುಗಳು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.

A	O	A	O	A	B	O	A	B	A	B	O
B	O	B	O	O	A	B	O	B	AB	O	A
O	O	O	A	AB	O	A	B	O	A	O	B

ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ. ಅತಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ರಕ್ತದ ಗುಂಪು ಯಾವುದು? ವಿರಳವಾದ ರಕ್ತದ ಗುಂಪು ಯಾವುದು?

3. ಒಂದೊಂದು ಬಾರಿಗೆ ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳಂತೆ 30 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದರೆ ಒಂದೊಂದು ಬಾರಿಗೆ ಬಿದ್ದ ರಾಜ (Head) ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇದೆ.

1	2	3	2	3	1	1	1	0	3	2	1
2	2	1	1	2	3	2	0	3	0	1	2
3	2	2	3	1	1						

ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ.

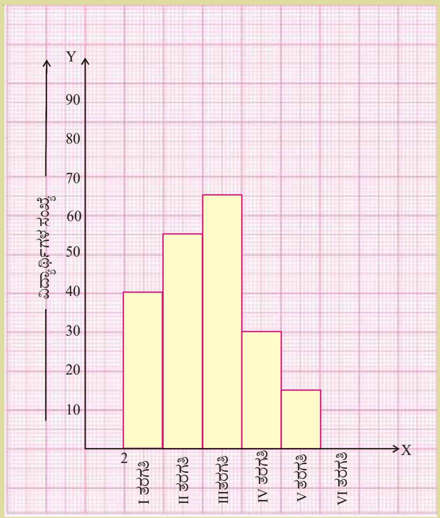
4. ಒಂದು ಟಿ.ವಿ. ಚಾನಲ್‌ರವರು ಧೂಮಪಾನ ನಿಷೇದದ ಮೇಲೆ SMS (ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸಂದೇಶ)ಗಳ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಆಹ್ವಾನಿಸಿದರು. ಕೊಟ್ಟ ಆಯ್ಕೆಗಳು, ಪೂರ್ತಿ ನಿಷೇಧ, ಬಹಿರಂಗ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ನಿಷೇಧ, ನಿಷೇಧ ಆವಸರವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ

SMS ಉತ್ತರಗಳು ಹೀಗಿವೆ.

				A	B	A	B	C	B
A	B	B	A	C	C	B	B	A	B
B	A	B	C	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	B	C	B	A	B	A
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A
B	B	A	B	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	C	A	B	B	A	

ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ. ಸರಿಯಾದ SMS ಸಮಾಧಾನಗಳು ಯಾವುವು? ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಜನಗಳ ಅಭಿಪ್ರಾಯವೇನು?

5. ಪಕ್ಕದ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



6. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಯತ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಆಯತ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ (ಅಕ್ಷಗಳಮೇಲೆ) ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

7. 75 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಬರೆದ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 30 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

42, 21, 50, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29

59, 61, 33, 17, 17, 39, 44, 42, 39, 14, 7, 27, 19, 54, 51.

ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ (0-10,10-20...) ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.

8. ಒಂದು ಪೇಟೆಯಲ್ಲಿ 25 ಮನೆಗಳ ತಿಂಗಳ ವಿದ್ಯುತ್ ವಿನಿಯೋಗದ ಬಿಲ್ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ 75 ಇರುವಂತೆ ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ.

170, 212, 252, 225, 310, 712, 412, 425, 322, 325, 192, 198, 230, 320, 412,

530, 602, 724, 370, 402, 317, 403, 405, 372, 413

9. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯವರು ತಯಾರಿಸಿದ ಕಾರು ಬ್ಯಾಟರಿಗಳಲ್ಲಿ 40 ಬ್ಯಾಟರಿಗಳ ಜೀವಿತಕಾಲ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ನಮೂದಿಸಿದ್ದಾರೆ.

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವಿಮುಕ್ತ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ. ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರ 0.5 ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 2-2.5 ವರ್ಗಾಂತರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ.

9.4 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳು

ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ

ಸಂದರ್ಭ 1 : ಒಂದು ವಸತಿ ಗೃಹದಲ್ಲಿ 50ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ಅಲ್ಪಾಹಾರದಲ್ಲಿ 200 ಇಡ್ಲಿಗಳನ್ನು ತಿಂದಿದ್ದಾರೆ. ಮತ್ತೆ 20 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಸತಿ ಗೃಹಕ್ಕೆ ಸೇರಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಇಡ್ಲಿಗಳು ಅವಶ್ಯಕ?

ಸಂದರ್ಭ 2 : ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳಗಳು (ಸಾವಿರಗಳಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಬಳಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯವಹಿಸುವ ಸಂಬಳ ಯಾವುದು?

ಉದ್ಯೋಗಿಗಳು	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ಸಂಬಳ (₹ ಸಾವಿರಗಳಲ್ಲಿ)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

ಸಂದರ್ಭ 3 : ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣ ಸಾಧನಗಳ ವಿವರಗಳು (ಶೇಕಡಾಗಳಲ್ಲಿ) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ನಗರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಪ್ರಮಾಣ ಸಾಧನ ಯಾವುದು?

1. ಕಾರು 15%
2. ರೈಲು 12%
3. ಬಸ್ಸು 60%
4. ಸ್ಕೂಟರ್ 13%

ಮೊದಲ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಆದರಿಂದ ಆವಸರವಾಗುವ ಅಂದಾಜನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಎರಡನೆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ₹ 30.7 ಸಾವಿರ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಅದು ಅವರ ಆದಾಯಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಅಂದಾಜು ಅಲ್ಲ. ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಬಳ ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ, ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಸಂಬಳಗಳು 12 ರಿಂದ 18 ಸಾವಿರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಸೂಕ್ತ ಉತ್ತರವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೂರನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬಹುಳಕ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ.

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶದ ಸ್ವಭಾವ ಮತ್ತು ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಸರಾಸರಿಯಾಗಲಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಲಿ, ಬಹುಳಕವಾಗಲಿ ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ

1. ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ, ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರರಾದ ರಘು, ಗೌತಮ್‌ರ ಕ್ರೀಡಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ಅವರ ಅಭಿಮಾನಿಗಳು ಕಳೆದ 5 ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಪಂದ್ಯಗಳು		1ನೇ	2ನೇ	3ನೇ	4ನೇ	5ನೇ
ರನ್ನುಗಳು	ರಘು	50	50	76	31	100
ಸಂಖ್ಯೆ	ಗೌತಮ್	65	23	100	100	10

ಇಬ್ಬರ ಆಟಗಾರರ ರನ್ನುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಅಭಿಮಾನಿಗಳು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ರಘು ಸರಾಸರಿ $= \frac{307}{5} = 61.4$

ಗೌತಮ್ ಸರಾಸರಿ $= \frac{298}{5} = 59.6$

ರಘು ಸರಾಸರಿ ಗೌತಮ್ ಸರಾಸರಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಆದ್ದರಿಂದ ರಘು ಒಳ್ಳೆಯ ಆಟಗಾರನೆಂದು ಅಭಿಮಾನಿಗಳು ವಾದಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಗೌತಮ್ ಅಭಿಮಾನಿಗಳು ಇನ್ನಿಂಗ್ಸ್ ವಿವರಗಳನ್ನು ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರು.

ರಘು	100	76	50	50	31
ಗೌತಮ್	100	100	65	23	10

ರನ್ನುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಗೌತಮ್‌ನ ಮಧ್ಯಾಂಕದ ರನ್ನುಗಳು 65, ಆದರೆ ರಘು ಮಧ್ಯಾಂಕ ರನ್ನುಗಳ 50 ಮಾತ್ರವೇ ಆದ್ದರಿಂದ ಗೌತಮ್ ಒಳ್ಳೆಯ ಆಟಗಾರನೆಂದು ಆವನ ಅಭಿಮಾನಿಗಳು ವಾದಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಗೌತಮ್ ಎರಡು ಸೆಂಚುರಿಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದಿದ್ದರಿಂದ ಆವನನ್ನು ಒಳ್ಳೆಯ ಆಟಗಾರನೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ಎಂದರೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಮಧ್ಯಮ, ಮಧ್ಯಮ ಮೌಲ್ಯ ಎಂದರೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ, ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಎಂದರೆ ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು ಅಲ್ಲವೇ! ಮತ್ತೊಂದು ಬಾರಿ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಮೊದಲು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದು ಸರಾಸರಿ ತಿಳಿಸಿದೆ, ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಧ್ಯಾಂಕ ತಿಳಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದು ಬಹುಳಕ ರಘುವಿನ ಸ್ಕೋರು ಬಹುಳಕ 50 , ಗೌತಮ್ ಸ್ಕೋರ್ ಬಹುಳಕ 100 ಇವುಗಳೆಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಿಯಾದ ಅಳತೆ.

ಈಗ ನಾವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.

9.4.1 ಸರಾಸರಿ (Arthmetic mean)

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶವೇ ಸರಾಸರಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$$\text{ಸರಾಸರಿ } \bar{x} = \frac{\text{ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} \text{ ಅಥವಾ } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

9.4.1.1 ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದ ಒಂದು ವಾರದ ವರ್ಷಾಪಾತ 4 ಸೆಂ.ಮೀ, 5 ಸೆಂ.ಮೀ,12 ಸೆಂ.ಮೀ,3 ಸೆಂ.ಮೀ, 6 ಸೆಂ.ಮೀ, 4 ಸೆಂ.ಮೀ,0.5 ಸೆಂ.ಮೀ ಎಂದು ರಿಕಾರ್ಡು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ದಿನದ ಸರಾಸರಿ ವರ್ಷಾಪಾತವೆಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ವಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿದಿನದ ವರ್ಷಾಪಾತ (ಸೆಂ.ಮೀ) = 4 ಸೆಂ.ಮೀ, 5 ಸೆಂ.ಮೀ, 12 ಸೆಂ.ಮೀ, 3 ಸೆಂ.ಮೀ, 6 ಸೆಂ.ಮೀ, 8 ಸೆಂ.ಮೀ, 0.5 ಸೆಂ.ಮೀ

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (n) = 7

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{n}$ ಇಲ್ಲಿ x_1, x_2 ..... x_n ಗಳು n ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು

ಮತ್ತು $\bar{x}$ ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿ $= \frac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \frac{38.5}{7} = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ

ಉದಾಹರಣೆ 5: 10, 12, 18, 13, P ಮತ್ತು 17ಗಳ ಸರಾಸರಿ 15 , ಅದರೆ P ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$$90 = 70 + P$$

$$P = 20.$$

9.4.1.2 ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಸರಾಸರಿ

ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ 40 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಆವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ತೂಕ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ)(x)	30	32	33	35	37	41
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f)	5	9	15	6	3	2

40 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು?

ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಮೊದಲ 5 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರ ತೂಕ 30 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಅಂದರೆ 5 ಮಂದಿ ಒಟ್ಟು ತೂಕ 5 X 30 = 150ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಉಳಿದ ತೂಕಗಳಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಆ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸರಾಸರಿ $(\bar{x}) = \frac{\text{ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ $= \frac{5 \times 30 + 9 \times 32 + 15 \times 33 + 6 \times 35 + 3 \times 37 + 2 \times 41}{5 + 9 + 15 + 6 + 3 + 2} = \frac{1336}{40} = 33.4$ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳು $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ ಆದರೆ,

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_{66}} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

$\therefore \bar{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ 1 : ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ $f_i \times x_i$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಹಂತ 2 : ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತ(Σf_i)

ಮತ್ತು $f_i \times x_i$ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ (Σf_ix_i) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಹಂತ 3: ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{755}{50} = 15.1$

x_i	f_i	f_ix_i
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_ix_i = 755$

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿ 7.5 ಆದರೆ 'A' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	5	6	7	8	9	10
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	10	17	A	8	4

ಪರಿಹಾರ :

ಅಂಕಗಳು (x_i)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	f_ix_i
5	3	15
6	10	60
7	17	119
8	A	8A
9	8	72
10	4	40
	42+A	306+8A

ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತ (Σf_i) = 42 + A

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ (Σf_ix_i) = 306 + 8A

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ixi}{\Sigma f_i}$

ಕೊಟ್ಟ ಬೆಲೆಯ ಪ್ರಕಾರ = 7.5

ಆದ್ದರಿಂದ , $7.5 = \dfrac{306 + 8A}{42 + A}$

$306 + 8A = 315 + 7.5A$

$$8A - 7.5\,A = 315 - 306$$

$$0.5\,A = 9$$

$$A = 18$$

9.4.1.3 ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಸರಾಸರಿ

ಉದಾಹರಣೆ 8 : ಕೆಳಗಿನ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	10	12	14	16	18	20	22
f	4	5	8	10	7	4	2

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಸಾಧಾರಣ ಪದ್ಧತಿ

ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

(ii) ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿ

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ A = 16 ಎಂದುಕೊಂಡು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತುಂಬಿಸಿದಾಗ...

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
10	4	–6	–24
12	5	–4	–20
14	8	–2	–16
16 A	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		–60+42=–18

ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತ = 40

ವಿಚಲನೆಗಳ $f_i \times d_i$ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ = – 60 + 42

$$\Sigma f_i d_i = -18$$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \frac{-18}{40}$

$$= 16 - 0.45$$

$$= 15.55$$

9.4.2 ಮಧ್ಯಾಂಕ :

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಇಲ್ಲವೇ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಮಧ್ಯವಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಮಧ್ಯಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಅರ್ಧ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮಧ್ಯಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದರೆ ಉಳಿದ ಅರ್ಧ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆ ಮಧ್ಯಾಂಕಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ.

ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕಲಿತುಕೊಂಡ ವಿಧವಾಗಿ ಕಚ್ಚಾ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆರೋಹಣ ಇಲ್ಲವೇ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 'n' ಮತ್ತು

'n' ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ = $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯ.

'n' ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ = $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ ಮತ್ತು $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಸರಾಸರಿ

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

1. 75, 21, 56, 36, 81, 05, 42 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇರುವ ದತ್ತಾಂಶ 7, 10, 15, x, y, 27, 30ರ ಮಧ್ಯಾಂಕ 17, ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ 50 ಎಂಬ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಮಧ್ಯಾಂಕ 18 ಆದರೆ x , y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9.4.2.1 ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ

ಭಾರತ್ವ ದತ್ತಾಂಶ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ (ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ) ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉದಾಹರಣೆ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ 100 ಮಂದಿ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ (₹)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	18	30	20	15	8	5

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಇಲ್ಲವೇ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಹಾಗೆ ವಿತರಣೆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಬರೆದು, ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು (ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದವರೆಗೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಎಂದರೆ ಆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಆವೃತ್ತಿ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳವರೆಗಿನ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತವೇ. ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಆವೃತ್ತಿಯೇ ಆದರ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಆಗುತ್ತದೆ) ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಸಂಬಳಗಳು (x)	ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ(cf)
7500	4	4
8000	18	22
8500	30	52
9000	20	72
9500	15	87
10000	8	95
11000	5	100
	100	

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ N ಆದರೆ $\frac{N}{2}$ ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು 'ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 'ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $N = 100$ ಆದ್ದರಿಂದ $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ ಮತ್ತು $\left(\frac{N}{2}+1\right)^{th}$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು.

ಅಂದರೆ 50, 51ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಗ್ರಹಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರೆ ಸಂಬಳ 8500. ಅಂದರೆ 8500 ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

1. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಅಂಕಗಳು	15	20	10	25	5
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	8	6	4	1

2. ಅವರ್ಗೀಕೃತ ವಿತರಣೆ ಪಟ್ಟಿಯ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಬರೆಯಬೇಕು? ಏಕೆ?

9.4.3 ಬಹುಳಕ ಅಥವಾ ರೂಢಿಬೆಲೆ

ಒಂದು ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಮೌಲ್ಯವೇ ಬಹುಳಕ ಅಥವಾ ರೂಢಿಬೆಲೆ. ಬಹುಳಕ ವು ಇತರೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಂದ ದಟ್ಟವಾಗಿ ಸುತ್ತುವರೆದಿರುವ ಆಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವೇ ಬಹುಳಕ.

ಉದಾಹರಣೆ 9 : ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಅಂಗಡಿಯವನು ಮಾರಿದ ಪಾದರಕ್ಷೆಗಳ ಸೈಜು ನಂಬರ್‌ಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತಾಂಶ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10 ಇಲ್ಲವೇ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

ಅಳತೆ ಸಂಖ್ಯೆ	6	7	8	9	10
ಮಾರಿದ ಪಾದರಕ್ಷೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	5	1	2	1

ಇಲ್ಲಿ 7 ರ ಆವೃತ್ತಿ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿ 5 ಆದ್ದರಿಂದ

$\therefore$ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಳಕ 7

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿರಿ

1. ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರ ಆಧಾರವಾಗಿ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿರಿ (ಉದಾಹರಣೆ ಬಾಲಕ - ಬಾಲಕಿಯರು) ಮತ್ತು ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಚಪ್ಪಲಿ ಅಂಗಡಿಯವನು ಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಯಾವ ಅಳತೆ ಚಪ್ಪಲಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಆರ್ಡರ್ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ?

ಉದಾಹರಣೆ 10 : 100 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ನಿರ್ವಹಿಸಿದ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 20 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

(a) 91-100, 81-90, ... ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಂದ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ.

(b) ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ (ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ)

(c) ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

(a)

ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ	ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
91-100	9	20
81-90	6	11
71-80	3	5
61-70	0	2
51-60	2	2
ಒಟ್ಟು	**20**	

(b) ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿಗಳು 9 ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 91-100 ಆದ್ದರಿಂದ ಇದೇ ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರ.

(c) 20 ರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ 10. ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದರೂ 10ನೇ ಮೌಲ್ಯವು 81-90 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 81-90ನ್ನು 'ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ ' ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

9.5 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳು

ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಮೌಲ್ಯ ಕೂಡಿದರೆ ಇಲ್ಲವೇ ಒಂದೇ ಸ್ಥಿರ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ ಕೇಂದ್ರ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ವಿವರಗಳು	ದತ್ತಾಂಶ	ಸರಾಸರಿ	ಬಹುಳಕ	ಮಧ್ಯಾಂಕ
ದತ್ತಾಂಶ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16, 20	12.2	14	13
ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ 3ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ	9, 10, 11, 13, 15, 17, 17, 18, 19, 23	15.2	17	16
ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ	12, 14, 16, 20, 24, 28, 28, 30, 32, 40	24.4	28	26

ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ

ಕೂಡಿದಾಗ : ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಇಲ್ಲವೇ ಕಳೆದರೆ ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳು ಸಹ ಅಷ್ಟೇ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಆಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ 3ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಸರಾಸರಿ, ಬಹುಳಕ , ಮಧ್ಯಾಂಕಗಳು ಸಹ 3 ಬೆಳೆದಿದೆ.

ಗುಣಿಸಿದಾಗ : ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಮೌಲ್ಯದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಕೇಂದ್ರ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳು ಸಹ ಅದೇ ವಿಧವಾದ ಅಷ್ಟುಪಟ್ಟು ಅಥವಾ ವಿಭಜನೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ, ಬಹುಳಕ , ಮಧ್ಯಾಂಕಗಳ ಸಹ 2 ರಷ್ಟು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.2

1. ಒಂದು ಸರುಕು ಸಾಗಾಣಿಕೆ ಕಾರ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಸಿಲ್ ತೂಕಗಳು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ತೂಕ(ಕಿ.ಗ್ರಾಂ)	50	65	75	90	110	120
ಪಾರ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	25	34	38	40	47	16

ಒಂದೊಂದು ಪಾರ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿ ತೂಕವೆಷ್ಟು?

2. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಒಂದೊಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿನ ಮಕ್ಕಳ ಸರಾಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0	1	2	3	4	5
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	11	25	32	10	5	1

3. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿ 7.2 ಆದರೆ .'K' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

4. ಭಾರತದೇಶ ಜನಗಣತಿ ಪ್ರಕಾರ ಗ್ರಾಮಗಳು , ಜನಸಂಖ್ಯೆ , ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ (ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಸಾವಿರಗಳಿಗೆ ಅಂದಾಜಿಸಿದೆ) ಒಂದೊಂದು ಗ್ರಾಮದ ಸರಾಸರಿ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಜನಸಂಖ್ಯೆ (ಸಾವಿರಗಳಲ್ಲಿ)	12	5	30	20	15	8
ಗ್ರಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20	15	32	35	36	7

5. AFLATOUN ಎಂಬ ಸಾಮಾಜಿಕ , ಆರ್ಥಿಕ , ವಿದ್ಯಾ ವಿಷಯದ ಸಂಘ, ಹೈದರಾಬಾದು ಜಿಲ್ಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಉಳಿತಾಯ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. ಪ್ರತಿ ಮಂಡಲಗಳು ಒಂದೊಂದು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಂಡಲ	ಶಾಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಒಟ್ಟು ಉಳಿತಾಯ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)
ಅಂಬರ್‌ಪೇಟ್	6	2154
ತಿರುಮಲಗಿರಿ	6	2478
ಸೈದಾಬಾದ್	5	975
ಖೈರತಾಬಾದ್	4	912
ಸಿಕಿಂದ್ರಾಬಾದ್	3	600
ಬಹದೂರ್‌ಪುರ	9	7533

ಒಂದೊಂದು ಮಂಡಲದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಶಾಲೆಯ ಸರಾಸರಿ ಉಳಿತಾಯ ವೆಷ್ಟು? ಜಿಲ್ಲಾ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಗಳ ಸರಾಸರಿ ಉಳಿತಾಯವೆಷ್ಟು?

6. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 9ನೇ ತರಗತಿ ಬಾಲ ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.

ಎತ್ತರ(ಸೆಂ.ಮೀ)	135	140	147	152	155	160
ಬಾಲಕರು	2	5	12	10	7	1
ಬಾಲಕಿಯರು	1	2	10	5	6	5

ಬಾಲ ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ

(ಸೂಚನೆ : ಬಾಲ ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ)

7. ವಿಶ್ವ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರರ ಶತಕಗಳು (100 ರನ್ನುಗಳು) ಮಾಡಿದ ಅವರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಶತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	10	15	20	25
ಆಟಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	56	23	39	13	8

ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಹೊಸ ವರ್ಷದ ಸಂದರ್ಭವಾಗಿ ಒಂದು ಮಿಠಾಯಿ ಅಂಗಡಿಯವರು ಮಿಠಾಯಿ ಪೊಟ್ಟಣಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದೊಂದು ಮಿಠಾಯಿ ಪೊಟ್ಟಣ ಬೆಲೆ, ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದ ಮಿಠಾಯಿ ಪೊಟ್ಟಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಿಠಾಯಿ ಪೊಟ್ಟಣದ ಬೆಲೆ ₹	₹25	₹50	₹75	₹100	₹125	₹ 150
ಪೊಟ್ಟಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20	36	32	29	22	11

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ , ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ತೂಕ 40 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಅವರಲ್ಲಿ ರಂಗನ ತೂಕ 64 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಇಬ್ಬರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಹೀಮ್, ರೇಷ್ಮಾ ತೂಕಗಳು ಸಮವಾದರೆ ರಹೀಮ್ ತೂಕವೆಷ್ಟು?

10. ಒಂದು ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ತರಗತಿಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಅನಾಥ ಆಶ್ರಮಕ್ಕೆ ಕೊಟ್ಟ ವಿರಾಳಗಳು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.

ತರಗತಿ	ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ವಿರಾಳ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
VI	5	15
VII	7	15
VIII	10	20
IX	15	16
X	20	14

ಈ ವಿವರಗಳಿಗೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ, ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲೆರಡರ ಸರಾಸರಿ 4 , ಮೊದಲ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿ 9, ಎಲ್ಲವುಗಳ ಸರಾಸರಿ 15 ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು 2 ಆದರೆ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

- ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ವಿಭಜನೆ ಪಟ್ಟಿ ಇಲ್ಲವೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಭಾರತ್ವ ಪಟ್ಟಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಇರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವುದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದೇ ಬಾರಿ ವೀಕ್ಷಿಸುವುದುದೆಂದರ್ಥ. ದತ್ತಾಂಶದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಬಗ್ಗೆ, ಯಾವ ಯಾವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುತ್ತಿವೆ ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಲು ಮತ್ತು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.
- ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಸುತ್ತಲೂ ಉಳಿದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿರುತ್ತವೆಯೋ ಆ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳು : ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ , ಬಹುಳಕ.
- ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$$\text{ಸರಾಸರಿ} = \frac{\text{ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

- ಅವರ್ಗೀಕೃತ ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$.

- ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ $=A + \dfrac{\Sigma fd}{\Sigma n}$ ಇಲ್ಲಿ A ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ. Σf ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು $\Sigma f\ d$ ಆವೃತ್ತಿ, ವಿಚಲನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೊತ್ತ.
- ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯದ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಮಧ್ಯಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 'n' ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{th}$ ನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಆಗುತ್ತದೆ.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 'n' ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $\left(\dfrac{n}{2}\right)^{th}$ ಮತ್ತು $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)^{th}$ ನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮೌಲ್ಯ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಆಗುತ್ತದೆ.
- ಮಧ್ಯಾಂಕ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು, ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಅರ್ಧ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮಧ್ಯಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು , ಉಳಿದ ಅರ್ಧ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮಧ್ಯಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತವೆ.
- ದತ್ತಾಂಶದ ಉಳಿದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಯಾದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಅಂದರೆ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಳಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಗೆ ಪರೀಕ್ಷೆ

ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಗೋಪಿ ಎಡಭಾಗದಿಂದ 7ನೇಯವನು ಮತ್ತು ಶಂಕರ್ ಬಲದಿಂದ 5ನೇ ಯವನು. ಅವರು ಅವರ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಶಂಕರ್ ಬಲದಿಂದ 8ನೇಯವನು ಆಗುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಕುಳಿತು ಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ?

4.5 ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 1.5 ಮೀ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಚೈತನ್ಯ ತನ್ನ ಹೆಸರನ್ನು ಕಾಂಡದ ಮೇಲೆ ಕೆತ್ತಿದ್ದಾನೆ. 19 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆ ಮರ 6.75 ಮೀ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತೆ ಈ ಚೈತನ್ಯನ ಹೆಸರು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

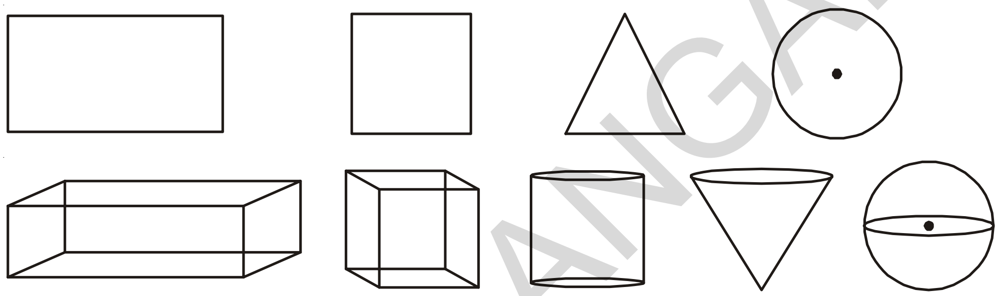
10 ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

10.1 ಪರಿಚಯ :

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(a)

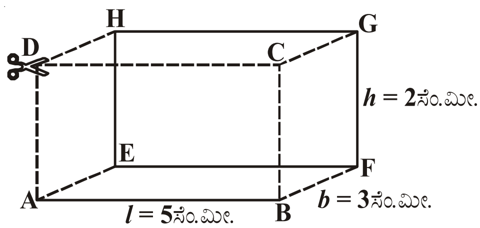
(b)



ಗುಂಪು (a) ಮತ್ತು (b)ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳ ಮಧ್ಯವಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿಂದ ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಗುಂಪು (a) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ನಾವು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ಅಗಲ, ಉದ್ದ ಎಂಬ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಅಥವಾ 2-D ಆಕೃತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಗುಂಪು (b) ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಆಕೃತಿಗಳು ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನೇ ಘನಾಕೃತಿಯ ವಸ್ತುಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಸ್ತುವುಗಳನ್ನು ನಾವು ನಮ್ಮ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ದಿನ ನಿತ್ಯವೂ ನೋಡುತ್ತಿರುತ್ತೇವೆ. ನೀವು ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ, ಗೋಳದಂತಹ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಇಲ್ಲವೇ ಮೂರು ಆಯಾಮದ (3-D)ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು, ಘನ ಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ.

10.2 ಆಯತ ಘನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :

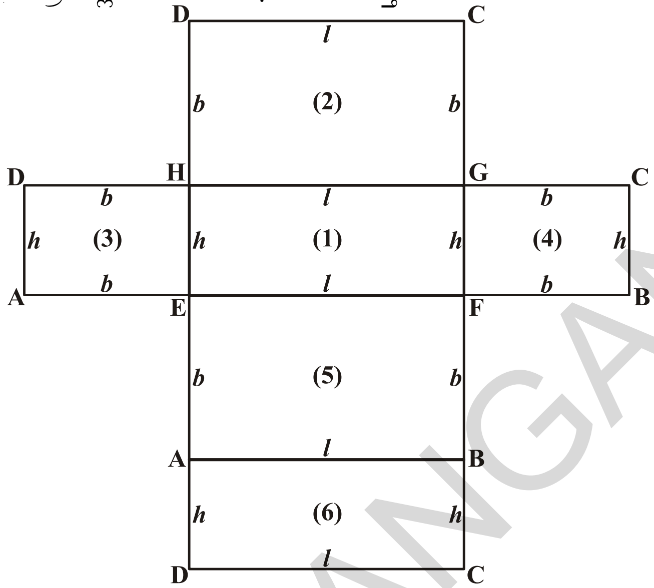


ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಆಯತ ಘನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅದು ಎಷ್ಟು ಮುಖಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ? ಶೃಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? ಮುಖಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಅವು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತಿವೆಯೋ ಹೇಳಿರಿ? ಯಾವ ಮುಖಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ಆಯತ ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಯಬಹುದು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

ಈಗ ನಾವು ಆಯತ ಘನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ (l) = 5 ಸೆಂ.ಮೀ.; ಅಗಲ (b) = 3 ಸೆಂ.ಮೀ; ತ್ತರ (h) = 2 ಸೆಂ.ಮೀ ಯಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ನಾವು ಕೊಟ್ಟ ಆಯತ ಘನವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ CD, ADHE ಮತ್ತು BCGF. ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.



ಈ ಆಯತಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 6 ಆಯತಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಸರ್ವಸಮವಾದ 3 ಜೊತೆಗಳ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ನಾವು ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು 6 ಆಯತ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ ಅದರ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

EFGH ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= l \times h = lh$ .....(1)

HGCD ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= l \times b = lb$ .....(2)

AEHD ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= b \times h = bh$ .....(3)

FBCG ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= b \times h = bh$ .....(4)

ABFE ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= l \times b = lb$ .....(5)

DCBA ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= l \times h = lh$ .....(6)

ಮೇಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ನಾವು ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)

$= lh + lb + bh + bh + lb + lh$

$= 2\,lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + bh + lh)$

(1), (3), (4), (6) ಎಂಬುವವು ಆಯತ ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು.

ಆಯತ ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (1) + (3) + (4) + (6)

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$

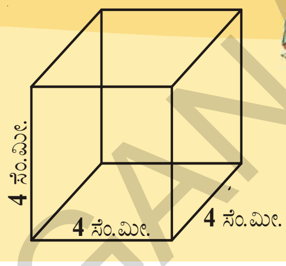
ಈಗ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಪೂರ್ಣ ರ್ಮಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 62 ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 32 ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಬಾಹು 'l' ಸೆಂ.ಮೀ ಉದ್ದ ವಿರುವ ಒಂದು ಘನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೀರಿ. ಹಿಂದೆ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಆಯತ ಘನವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಮಾಡಿ ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

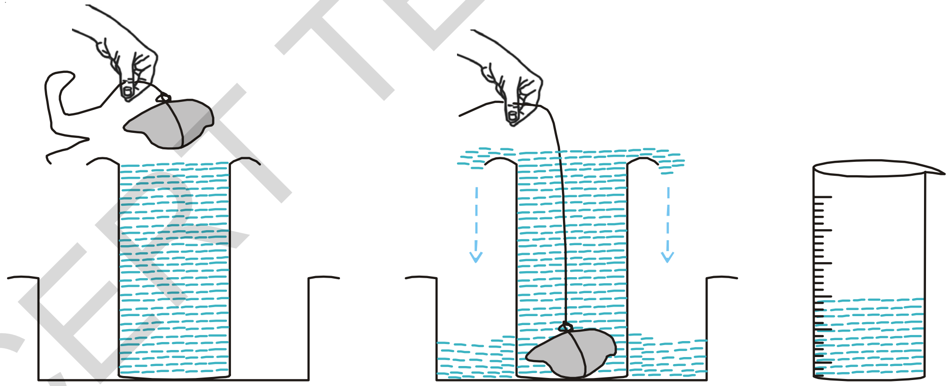
1. ಬಾಹು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಘನದ ಬಾಹುವನ್ನು 50%. ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಶೇಕಡಾ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ?



10.2.1 ಘನಫಲ

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಒಂದು ಗಾಜಿನ ಬೀಕರನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಅಗಲದ ಜಾಡಿಯೊಳಗೆ ಇಡಿರಿ. ಬೀಕರಿನ ಕಂಠಪೂರ್ತಿ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿರಿ. ನಿಧಾನವಾಗಿ ದಾರದಿಂದ ಕಟ್ಟಿದ ಒಂದು ಕಲ್ಲನ್ನು ನೀರಿನೊಳಗೆ ಬಿಡಿರಿ. ಆಗ ಸ್ವಲ್ಪ ನೀರು ಬೀಕರಿನಿಂದ ಜಾಡಿಯೊಳಗೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಬಿದ್ದ ನೀರನ್ನು ಒಂದು ಅಳತೆಯ ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗೆ ಹಾಕಿ ಅಳೆಯಿರಿ. ಈ ನೀರು ಆ ಘನಾಕೃತಿಯು ಆಕ್ರಮಿಸಿದ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ನಾವು 'ಘನಫಲ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



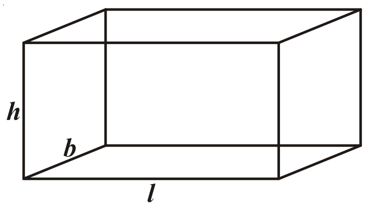
ಪ್ರತಿ ಆಕೃತಿಯು ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆ ಆಕೃತಿಯು ಆಕ್ರಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವನ್ನು ಅದರ 'ಘನಫಲ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಘನ ಫಲವನ್ನು ಘನಮಾನಗಳಿಂದ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

10.2.2 ಪಾತ್ರೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳಾದ ವಸ್ತುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಒಳ ಭಾಗವೆಲ್ಲಾ ಖಾಲಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾಗವು ಗಾಳಿ ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೂ ದ್ರವದಿಂದ ತುಂಬಬಹುದು. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ತುಂಬುವುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಆಕೃತಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂತರವಾಗಿ ತುಂಬಿದ ದ್ರವದ ಅಥವಾ ಗಾಳಿಯ ಘನ ಫಲವನ್ನು ಆ ಪಾತ್ರೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆಯತ ಘನದ ಘನ ಫಲ : ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೆಲವು ಆಯತಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಜೋಡಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಯಾವ ಆಕೃತಿ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ?

ಇದು ಒಂದು ಆಯತ ಘನ.



ಈಗ ಆಯತ ಘನದ ಘನ ಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಇದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆಯತ ಘನದ ಎತ್ತರ, ಜೋಡಿಸಿದ ಆಯತಗಳ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆಯತ ಘನ ಆಕ್ರಮಿಸಿದ ಸ್ಥಳ = ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ× ಎತ್ತರ.

ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ $= l\,b \times h = l\,bh$

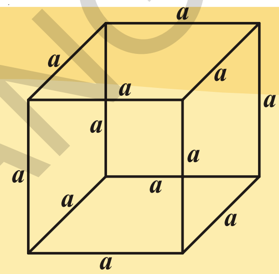
$\therefore$ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ $= l\,bh$

ಇಲ್ಲಿ l, b, h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ಎತ್ತರಗಳು.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

(a) 'a' ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ಘನಫಲ 1000 ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಬಾಹುವಿನುದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಯತಘನ ಮತ್ತು ಘನಗಳು ಘನಾಕೃತಿಗಳು. ಅವುಗಳನ್ನು ನೇರ ಪಟ್ಟಕಗಳಾಗಿ (Ryht prism) ಕರೆಯಬಹುದಾ? ಆಯತ ಘನವನ್ನು, ಘನವನ್ನು ನೇರ ಪಟ್ಟಕಗಳಾಗಿ ಕರೆಯಬಹುದು.

ನೇರ ಪಟ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಆಯತಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು ಮತ್ತು ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ, ಆಯತ ಘನದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ = ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಎತ್ತರ

$= lb \times h$

$= lbh$

ಘನದಲ್ಲಿ $= l = b = h = \mathrm{s}$ (ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳು ಸಮ)

ಘನದ ಘನಫಲ $= \mathrm{s}^2 \times \mathrm{s}$

$= \mathrm{s}^3$

ನೇರ ಪಟ್ಟಕದ ಘನಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ.

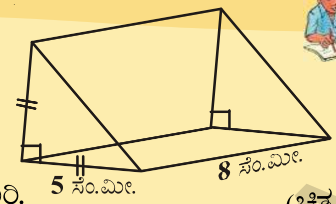
ಆದ್ದರಿಂದ ನೇರ ಪಟ್ಟಕದ ಘನಫಲ = ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಎತ್ತರ.

ನೇರ ಪಟ್ಟಕದ ಪಾದ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಘನಫಲ $\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 \times \mathrm{h}$.

ಇಲ್ಲಿ, 'a' ಪಾದದ ಉದ್ದ 'h' ಪಟ್ಟಕದ ಎತ್ತರ.

ಇವು ಮಾಡಿರಿ:

1. ಒಂದು ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $l = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ. ., $b = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $h = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಬಾಹು 10 ಸೆಂ.ಮೀ ಯಾಗಿರುವ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(ಚಿತ್ರ 1)

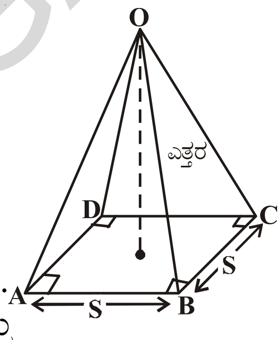
3. ಚಿತ್ರ 1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಪಟ್ಟಕದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪಟ್ಟಕದ ಹಾಗೆ, ಗೋಪುರ (ಪಿರಮಿಡ್) ಸಹ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಚಿತ್ರ (3D) ವಸ್ತು, ಅನಾದಿಕಾಲದಿಂದಲೂ ಮಾನವನು ಗೋಪುರದಂತಹ ನಿರ್ಮಾಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ವಹಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರಪಂಚದ ಏಳು ವಿಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆದ ಈಜಿಪ್ಟ್ ಪಿರಮಿಡ್ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಓದಿದ್ದೀರಿ ಅಲ್ಲವೇ! ಅವು ವರ್ಗಪಾದ ಹೊಂದಿದ ಪಿರಮಿಡ್ (ಗೋಪುರ) ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಒಳ್ಳೆಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಅವುಗಳನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ನಿರ್ಮಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬ ಅಂಶ ಈಗಲೂ ಒಂದು ಚರ್ಚನೀಯ ಅಂಶವಾಗಿದೆ !

ಆದರೆ ನಿಮಗೆ ಗೋಪುರ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು, ರಚಿಸುವುದು ಗೊತ್ತೇ!

ಪಟ್ಟಕ, ಗೋಪುರ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

ಚೌಕಾಕಾರ ಪಾದ ಹೊಂದಿದ ಗೋಪುರವನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ?

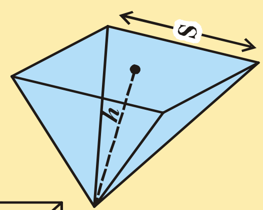


'S' ಯೂನಿಟ್ ಬಾಹು, 'h' ಯೂನಿಟ್ಸ್ ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗಪಾದ ಗೋಪುರ OABCD. ಎತ್ತರ, ಪಾದ ಸಮಾನವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಘನದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಾ? ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

ಪಾದ, ಎತ್ತರ ಸಮವಾಗಿರುವ ಘನ, ವರ್ಗಪಾದ ಗೋಪುರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಗೋಪುರವನ್ನು ಒಂದು ದ್ರವದಿಂದ ತುಂಬಿ ಆ ದ್ರವವನ್ನು ಘನದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬಿರಿ. ಘನವನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟು ಗೋಪುರಗಳ ದ್ರವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು? ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಅದು ಮೂರು ಬಾರಿ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

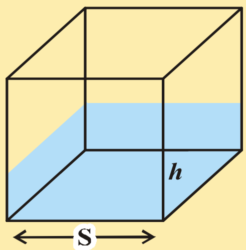


ಇದರಿಂದ ಗೋಪುರದ ಘನಫಲ

$= \frac{1}{3}$ ×ನೇರ ಪಟ್ಟಕದ ಘನಫಲ

(ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಎತ್ತರ)

$= \frac{1}{3}$ × ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಎತ್ತರ.



Òlãal® : ಒಂದು ನೇರ ಪಟ್ಟಕಕ್ಕೆ, ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುವ ಹಾಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳೆಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳೇ.

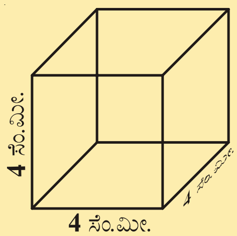
ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

1. 10 ಸೆಂ.ಮೀ ಬಾಹು ಹೊಂದಿರುವ ಚೌಕಪಾದ ಮತ್ತು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿದ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಘನದ ಘನಫಲ 1200 ಘ ಸೆಂ.ಮೀ. ಘನದ ಎತ್ತರದೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನ ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗಪಾದ ಗೋಪುರದ ಘನಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

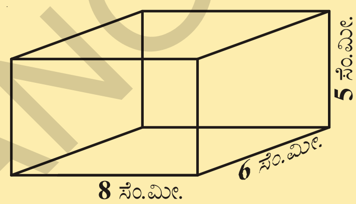
ಅಭ್ಯಾಸ - 10.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ನೇರ ಪಟ್ಟಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)



(ii)



2. ಒಂದು ಘನದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 1350 ಚ. ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಉದ್ದ 12 ಮೀ, ಅಗಲ 10 ಮೀ ಮತ್ತು 7.5 ಮೀ ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ಕೋಣೆಯ ನಾಲ್ಕು ಗೋಡೆಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಬಾಗಿಲು ಅಥವಾ ಕಿಟಕಿಗಳು ಇಲ್ಲದ ಕೋಣೆಯಾಗಿ ಊಹಿಸಿರಿ).
4. ಒಂದು ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ 1200 ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರ ಉದ್ದ 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಗಲ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಎತ್ತರವನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ?

(i) ಪ್ರತಿ ಅಳತೆ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದಾಗ (ii) ಪ್ರತಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದಾಗ

ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ. [ಪ್ರತಿ ಅಳತೆ n ಬಾರಿ ಹೆಚ್ಚಿದಾಗ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.]

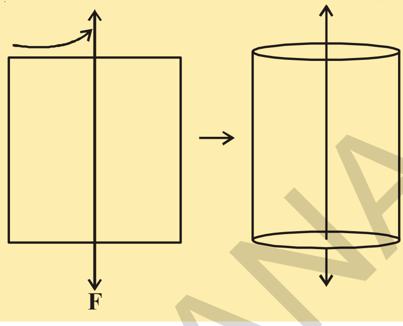
6. ಒಂದು ಪಟ್ಟಕದ ಪಾದ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ., 4 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೊಂದಿ ಅದರ ಎತ್ತರ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ಪಟ್ಟಕದ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?
7. ಒಂದು ನೇರ ವರ್ಗಪಾದ ಗೋಪುರದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ 16 ಮೀ, ಎತ್ತರ 3 ಮೀ ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಲಂಪಿಕ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿನ ಈಜುಕೊಳ 50 ಮೀ ಉದ್ದ, 25 ಮೀ ಅಗಲ ಮತ್ತು 3 ಮೀ ಆಳವಿರುವ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ ಅದು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸಬಲ್ಲ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹೊಂದಿದೆ?

ಚಟುವಟಿಕೆ :

ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರ ರಟ್ಟು ಇಲ್ಲವೇ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಒಂದು ಉದ್ದವಾದ ತೆಳುವಾದ ತಂತಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಅಂಟಿಸಿರಿ. ತಂತಿಯ ಎರಡು ಕೊನೆಗಳನ್ನು ಹಿಡಿದುಕೊಂಡು ಆಯತಾಕಾರ ರಟ್ಟನ್ನು ವೇಗವಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಿ.

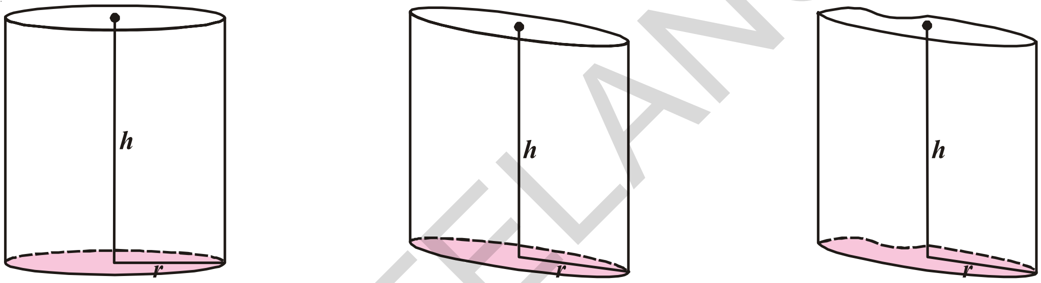
ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಂಡ ಆಕೃತಿ ಯಾವುದು?

ಇದನ್ನು ಸಿಲಿಂಡರ್ (ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ) ಯಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿದ್ದೀರಾ?



10.3 ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಸಿಲಿಂಡರ್

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ :



(i) ಮೂರು ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ ಸಾರೂಪ್ಯತೆಗಳೇನು?

(ii) ಮೂರು ಆಕೃತಿಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೇನು?

(iii) ಯಾವ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಎತ್ತರ, ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇದೆ?

ಪ್ರತಿ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಒಂದು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಸಿಲಿಂಡರ್ (ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ) ಎನ್ನುವರು. ಇವುಗಳ ವೃತ್ತಾಕಾರಗಳ ಕೊನೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆ ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಅಥವಾ ನೇರ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ನೇರ ಸಿಲಿಂಡರ್ (ನೇರ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ), ಯಾವುವು ನೇರ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ಗಳಲ್ಲ? ಗುರ್ತಿಸಿ ಕಾರನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡುವ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

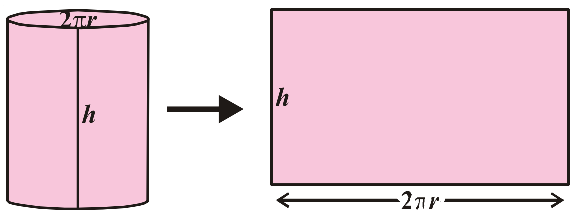
10.3.1 ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿರಿ. ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ಉದ್ದವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿ ಇಡಿರಿ. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಆಯತಾಕಾರಾವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಿಲಿಂಡೇರ್‌ನ ಎತ್ತರ, ಆಯತದ ಅಗಲವಾಗಿ, ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ ಆಯತದ ಉದ್ದವಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಸಿಲಿಂಡರ್ ಯಾವ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗಿದೆ?

ನೀವು ಚಿತ್ರವು ಆಯತಾಕಾರವಾಗಿ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ಅಲ್ಲವೇ? ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆಯತದ ಅಗಲ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರವಾಗಿ, ಉದ್ದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಿಲಿಂಡರ್ ಎತ್ತರ = ಆಯತದ ಅಗಲ ($h = b$)

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ 'r' = ಆಯತದ ಉದ್ದ ($2\pi r = l$)



ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಉದ್ದ × ಅಗಲ

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\mathbf{2\pi rh}$

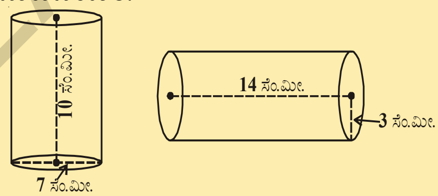
ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $r = x$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = y$ ಸೆಂ.ಮೀ.

(ii) $d = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ.

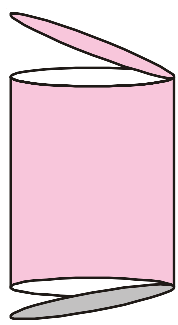
(iii) $r = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.



10.3.2 ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಈ ಚಿತ್ರವು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಸಿಲಿಂಡರ್ .ಯಾವ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ನಿಮಗೆ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬರುತ್ತದೆ. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಮೇಲ್ಭಾಗ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬರುತ್ತದೆ.



ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

$= 2\pi r\,(r + h)$

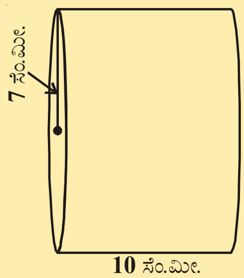
$\therefore$ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi r\,(r + h)$

ಇದರಲ್ಲಿ 'r' ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 'h' ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರ.

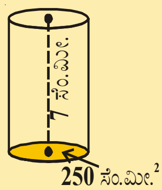
ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ಗಳ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)



(ii)



10.3.3 ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ

ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಕೆಲವು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರಿ.

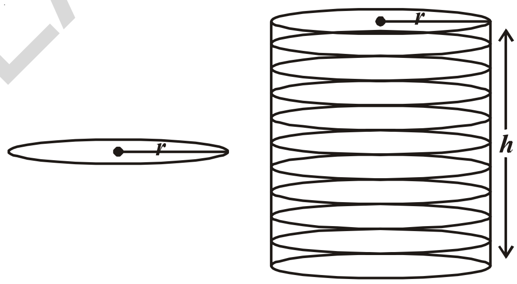
ಈ ಚಟುವಟಿಕೆ ಮೂಲಕ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಏರ್ಪಡುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಜೋಡಣೆಯ ಎತ್ತರ 'h' ಆದರೆ,

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ $= \pi r^2 \times$ ಎತ್ತರ

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$



ÔÈ ívÃ...® Z®ಫಲ = $\pi r^2 h$

'r' ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 'h' ಎತ್ತರ.

ಉದಾಹರಣೆ -1. 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಕಾಗದವನ್ನು ಅಗಲದ ಮೂಲಕ ರೋಲ್ ಮಾಡಿದರೆ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 1) ?

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ$\left.\right)$

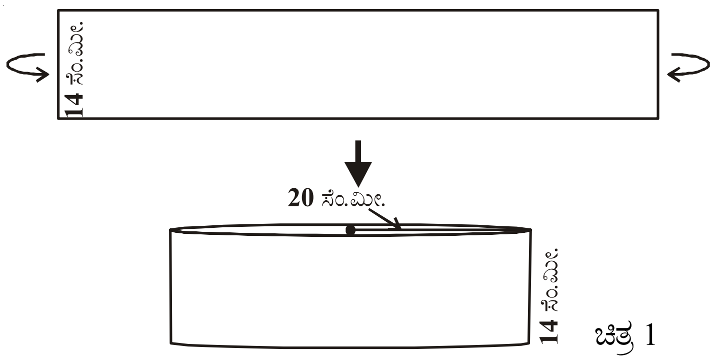
ಪರಿಹಾರ : ಆಯತಾಕಾರ ಕಾಗದವನ್ನು ಅಗಲಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ರೋಲ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರ ಕಾಗದದ ಅಗಲಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರ = h = 14 ಸೆಂ.ಮೀ

ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ (r) = 20 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ V = $\pi r^2 h$



ಚಿತ್ರ 1

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

$= 17600$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ 17600 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

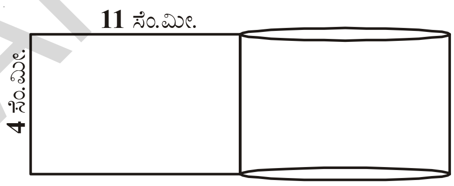
ಉದಾಹರಣೆ -2. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಕಾಗದ 11 ಸೆಂ.ಮೀ. × 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅದರ ಅಂಚುಗಳು ಅಧ್ಯಾರೋಹಣೆ (overlapping) ಹೊಂದದ ಇರುವ ಹಾಗೆ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಗಿ ಮಡಚಿದರೆ, ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಕಾಗದದ ಉದ್ದ, ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ, ಅಗಲ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯ = r ಮತ್ತು ಎತ್ತರ = h

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ = $2\pi r = 11$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$



$\therefore \quad r = \frac{7}{4}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$h = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ $(V) = \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.^{3}

$= 38.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.^{3}.

ಉದಾಹರಣೆ-3. ಆಯತಾಕಾರಾದಲ್ಲಿರುವ ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದ 44 ಸೆಂ.ಮೀ× 18 ಸೆಂ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಅದರ ಉದ್ದದ ಮೂಲಕ ಸುತ್ತಿ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ್ನು ಘನವಾಗಿ ಭಾವಿಸಿದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರ = 18 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ = 44 ಸೆಂ.ಮೀ.

$2\pi r = 44$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$r = \frac{44}{2 \times \pi} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸಂಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r\,(r+\mathrm{h})$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 7(7+18)\text{ಸೆಂ.ಮೀ.}^2$$

$= 1100$ ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}.

ಉದಾಹರಣೆ-4. 5 ಮಿ.ಮೀ. ದಪ್ಪ ಹೊಂದಿದ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪ್ಲೇಟುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಜೋಡಿಸಿ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಗಿ ನಿರ್ಮಾಡಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 462 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಸಿಲಿಂಡರ್ ನಿರ್ಮಾಡಿಸಲು ಬೇಕಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪ್ಲೇಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? ಪ್ಲೇಟಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಪರಿಹಾರ : ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪ್ಲೇಟುಗಳ ದಪ್ಪ = 5 ಮಿ.ಮೀ.= $\frac{5}{10}$ ಸೆಂ.ಮೀ. = 0.5 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಪ್ಲೇಟಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 462 ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore\ 2\pi \mathrm{rh} = 462$ ..... (i)

ಸಿಲಿಂಡರ್ ನಿರ್ಮಾಡಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪ್ಲೇಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = x ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$\therefore$ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರ = h = ಪ್ಲೇಟಿನ ದಪ್ಪ × ಪ್ಲೇಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$= 0.5\,x$

$$\therefore\ 2\,\pi \mathrm{rh} = 2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x \quad ..... \text{(ii)}$$

(i) ಮತ್ತು (ii) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ

$$2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x = 462$$

$$\therefore\ x = \frac{462\times 7}{2\times 22\times 3.5\times 0.5} = 42 \text{ ಪ್ಲೇಟುಗಳು.}$$

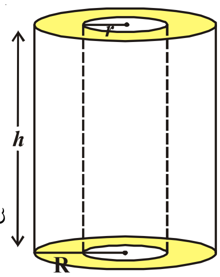
ಉದಾಹರಣೆ-5. ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಲೋಹದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಬಾಹ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 8 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 10 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 338 π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಟೊಳ್ಳು ಲೋಹದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ದಪ್ಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ..

ಪರಿಹಾರ : ಬಾಹ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯ = R = 8 ಸೆಂ.ಮೀ

ಅಂತರ್ ತ್ರಿಜ್ಯ = r

ಎತ್ತರ = 10 ಸೆಂ.ಮೀ

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 338π ಸೆಂ.ಮೀ^{2}.



ಆದರೆ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಹೊರಗಡೆ ಭಾಗದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (CSA) + ಒಳಭಾಗದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + 2 x ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2)$$

$$= 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2)$$

$\therefore\ 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2) = 338\pi$

$Rh + rh + R^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow\ (10 \times 8) + (r \times 10) + 8^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow\ r^2 - 10r + 25 = 0$

$\Rightarrow\ (r - 5)^2 = 0$

$\therefore\ r = 5$

$\therefore$ ಲೋಹದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ದಪ್ಪ $= R - r = (8 - 5)$ಸೆಂ.ಮೀ $= 3$ ಸೆಂ.ಮೀ

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

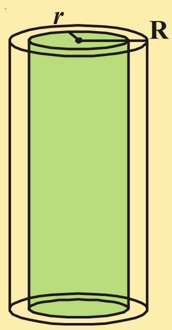
1. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾಗದಂತೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎರಡರಷ್ಟು ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆ ಎಷ್ಟು ?
2. ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್‌ನ ಸಿಲಿಂಡಿಕಾರದ ಪೈಪಿನ ಉದ್ದ 14 ಮೀ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ನೀರನ್ನು ಬಿಸಿ ಮಾಡುವ ಆ ಹೀಟರ್‌ನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 10.2

1. ಎರಡೂ ಕಡೆ ಮುಚ್ಚಿದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕಾರದ ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಎತ್ತರ 1.4 ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 56 ಸೆಂ.ಮೀ ಯಾಗಿ ಇರುವ ಲೋಹದ ರೇಕಿನಿಂದ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ 308 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಲೋಹ ಆಯತ ಘನ 22 ಸೆಂ.ಮೀ. × 15 ಸೆಂ.ಮೀ. × 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 14 ಸೆಂ.ಮೀ ಎತ್ತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸ್ತಂಭವಾನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವೆಷ್ಟು?
4. ಒಂದು ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿ ಸ್ತಂಭಾಕಾರವಾಗಿದ್ದು 616 ಮೀ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಟ್ಯಾಂಕಿನ ವ್ಯಾಸ 5.6 ಮೀ. ಆದರೆ ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಲೋಹದ ಕೊಳವೆ 77 ಸೆಂ. ಮೀ ಉದ್ದವಿದೆ. ಅದರ ಮಧ್ಯಚ್ಛೇದ ಅಂತರ್ ವ್ಯಾಸ 4 ಸೆಂ. ಮೀ ಮತ್ತು 4.4 ಸೆಂ. ಮೀ ಬಾಹ್ಯ ವ್ಯಾಸ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

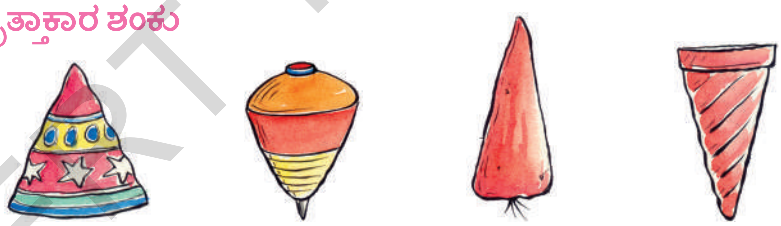
   i) ಒಳ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ   ii) ಬಾಹ್ಯ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

   iii) ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



6. ಒಂದು ಭವನದ ಸುತ್ತಲೂ 16 ಸ್ತೂಪಾಕಾರ ಸ್ತಂಭಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಸ್ತೂಪಾಕಾರ ಸ್ಥಂಭವು 56 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಮತ್ತು 56 ಮೀ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಚ.ಮೀ.ಗೆ ₹ 5.50 ರಂತೆ ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ?
7. ಒಂದು ರೋಡ್‌ರೋಲರ್‌ನ ವ್ಯಾಸ 84 ಸೆಂ.ಮೀ, ಉದ್ದ 120 ಸೆಂ.ಮೀ ಒಂದು ಆಟ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟಾಗಿ ಮಾಡಲು 500 ಸಂಪೂರ್ಣ ಭ್ರಮಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆಟ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
8. ವೃತ್ತಾಕಾರ ಬಾವಿಯ ಒಳಗಿನ ವ್ಯಾಸ 3.5 ಮೀ, ಆಳ 10 ಮೀ ಆದರೆ
   (i) ಒಳಗಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?
   (ii) ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳನ್ನು ಪ್ಲಾಸ್ಟರಿಂಗ್ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಚ.ಮೀ.ಗೆ ₹ 40 ರಂತೆ ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ?
9. (i) ಒಂದು ಸ್ತೂಪಾಕಾರ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಟ್ಯಾಂಕು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 4.2 ಮೀ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 4.5 ಮೀ ಆದರೆ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲು ಬಳಸಿದ ಸ್ಟೀಲಿನಲ್ಲಿ $\frac{1}{12}$ ನೇ ಭಾಗ ವ್ಯರ್ಥ ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ ಸ್ಟೀಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೋ ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.
10. ಒಂದು ಕಡೆ ಮುಚ್ಚಿದ, ಸ್ತೂಪಾಕಾರ ಡ್ರಮ್‌ನ ಒಳಗಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ 28 ಸೆಂ.ಮೀ ಎತ್ತರ 2.1 ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ಡ್ರಮ್ಮಿನಲ್ಲಿ ಶೇಖರಣೆ ಮಾಡಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಲೀಟರುಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ. (1 ಲೀಟರ್= 1000 ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ.)
11. ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಕಾರದ ವಸ್ತುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 1760 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದರ ಘನ ಫಲ 12320 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

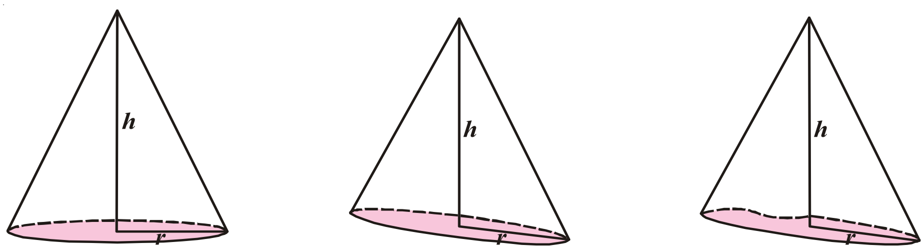
10.4 ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕು



ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಆ ಆಕೃತಿಗಳು ಯಾವ ಯಾವ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಹೇಳಿರಿ?

ಮೇಲಿನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಶಂಕು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ :



(i) (ii) (iii)

(i) ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಯಾವುವು?

(ii) ಈ ಶಂಕುವಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೇನು?

ಮೊದಲನೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಕ್ರತಾ ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಮತ್ತು ಪಾದವು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು, ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇದೆ.

ಈ ವಿಧವಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಎರಡನೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾದವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದರೆ ಎತ್ತರ ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇಲ್ಲ.

ಇಂತಹ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರವಲ್ಲದ ಶಂಕು ಅಥವಾ ಓರೆ ಶಂಕುಗಳೆನ್ನುವರು.

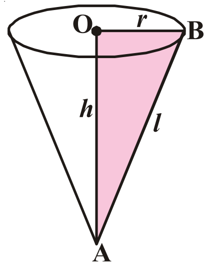
ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಮೂರನೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎತ್ತರ, ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇದೆ. ಆದರೆ ಪಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಶಂಕು ನೇರ ವೃತ್ತ ಶಂಕುಅಲ್ಲ.

10.4.1 ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overline{OB}$, $\overline{AO}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇದೆ.

ΔAOB ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

$\overline{AO}$, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ (h) ಮತ್ತು $\overline{OB}$ ಶಂಕುವಿನ (r) ಗೆ ಸಮ.



ΔAOB ಯಿಂದ

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (ಓರೆ ಎತ್ತರ $AB = l$)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

ಚಟುವಟಿಕೆ

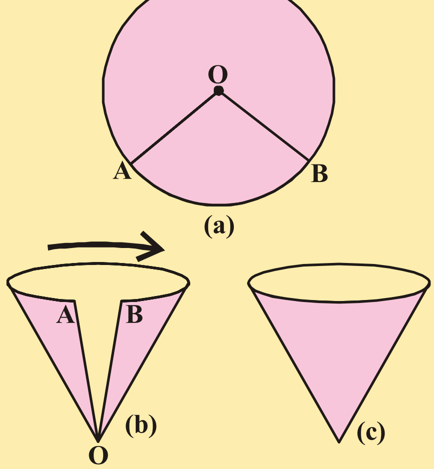
ಸೆಕ್ಟರ್‌ನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವ ವಿಧಾನ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತಾ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ.

(i) ಚಿತ್ರ (a) ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) ಚಿತ್ರ (b)ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಸೆಕ್ಟರ್ ಅಥವಾ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ' ಖಂಡ AOB ಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ.

(iii) ಚಿತ್ರ (c)ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ A ಮತ್ತು B ಕೊನಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಹತ್ತಿರ ಒಂದು ತಾಕುವ ಹಾಗೆ ನಿಧಾನವಾಗಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಸೇರಿಸಿರಿ. A, B ಗಳು ಅಧ್ಯಾರೋಹಣವಾಗಕೂಡದು. A, B ಗಳನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರಿ.

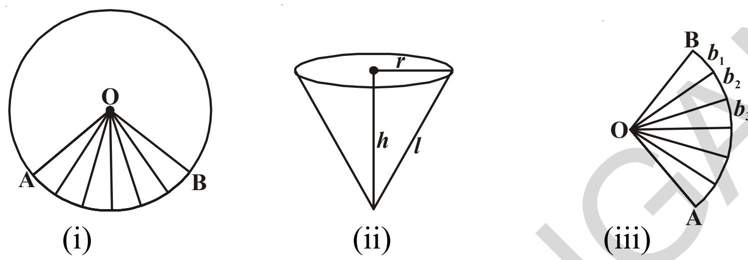


(iv) ನೀವು ಪಡೆದ ಆಕೃತಿಯು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳೇನು?

ಅದು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕು ಆಗುತ್ತದೆಯೇ?

'OA' ಮತ್ತು 'OB' ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಶಂಕು ತಯಾರುಮಾಡುವಾಗ OA ,OB ಮತ್ತು ಕಂಸ AB ಗಳ ಉದ್ದಗಳಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿದ ಬದಲಾವಣೆಗಳೇನು?

10.4.2 ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಅಥವಾ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ



ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕಾಗದದ ನೇರ ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಸೆಕ್ಟರ್ OAB ಯನ್ನು ಮಡಚಿ ಶಂಕುವಿನ ಹಾಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ OA, OB ಗಳು ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದರಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗಿ ಓರೆ ಎತ್ತರವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಶಂಕುವು ಪಾದದ ಪರಿಧಿಗೆ ಸೆಕ್ಟರ್ ಕಂಸ AB ಉದ್ದ ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಶಂಕುವನ್ನು ಬಿಚ್ಚಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ AOB ಸೆಕ್ಟರ್‌ನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ ಪ್ರತಿ ಕತ್ತರಿಸಲಾದ ಭಾಗವು ಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಹೋಲಿರುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ಪಾದಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ b_1, b_2, b_3 ..... ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ 'l' ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಶಂಕುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದರೆ ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ನಾವು ಸೆಕ್ಟರ್‌ನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೆಕ್ಟರು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಭುಜಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ.

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \frac{1}{2}b_4 l + ...$$

$$= \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...)$$

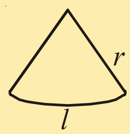
$= \frac{1}{2}l$ (A ನಿಂದ B ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ಉದ್ದ, ಇಲ್ಲವೇ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ)

$= \frac{1}{2}l(2\pi r)$ $(\because b_1 + b_2 + b_3 + ... = 2\pi r$, ಇಲ್ಲಿ 'r' ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ)

$\overparen{AB}$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

'r' ತ್ರಿಜ್ಯ, 'l' ಕಂಸದ ಉದ್ದವಿರುವ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ವೃತ್ತಾಕಾರ ಕಾಗದದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ಶಂಕುವಾಗಿ ತಯಾರುಮಾಡಿರಿ. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ A = πrl ನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಉತ್ಪಾದಿಸುವಿಯೋ ಹೇಳಿರಿ.



ಆದ್ದರಿಂದ ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ಅಥವಾ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πrl

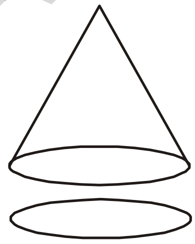
ಇದರಲ್ಲಿ 'l' ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ, 'r' ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ

10.4.3 ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲಿನ / ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಹೊದಿಸಿ ಇಡುವುದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಆಕೃತಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ? ಎಷ್ಟು ಮುಖಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬರುತ್ತದೆ.

ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πr^2



ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r)$$

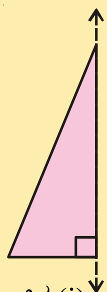
ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\boldsymbol{\pi r (l + r)}$

ಇದರಲ್ಲಿ 'r' ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'l' ಓರೆ ಎತ್ತರ

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

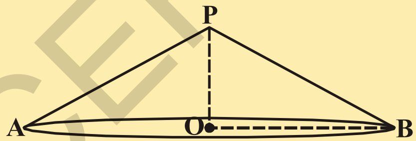
1. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ/ ಕತ್ತಿರಿಸಿರಿ. ಅದನ್ನು ಒಂದು ಸಣ್ಣನೆಯ ಬಿದಿರು ಕಡ್ಡಿಗೆಲಂಬಕೋನ ಬಾಹುವನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರಿ. ಕಡ್ಡಿಯ ಎರಡು ಕಡೆ ಹಿಡಿದುಕೊಂಡು ಸುತ್ತಲೂ ತಿರುಗಿಸಿರಿ. ತಿರುಗಿಸುವ ವೇಗ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಇರಬೇಕು.

   ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

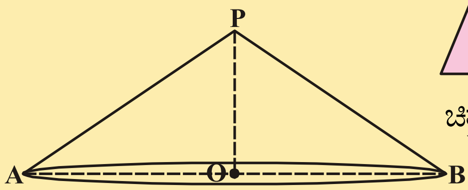


ಚಿತ್ರ (i)

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಸಂಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

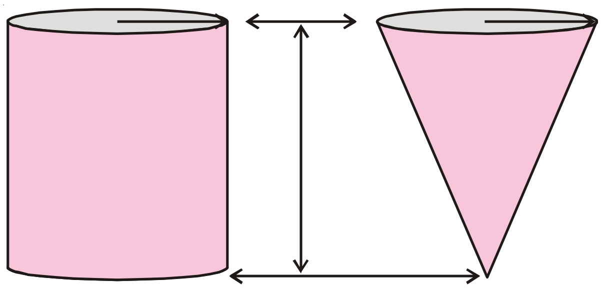


OP = 2 ಸೆಂ.ಮೀ..; **OB = 3.5**ಸೆಂ.ಮೀ.

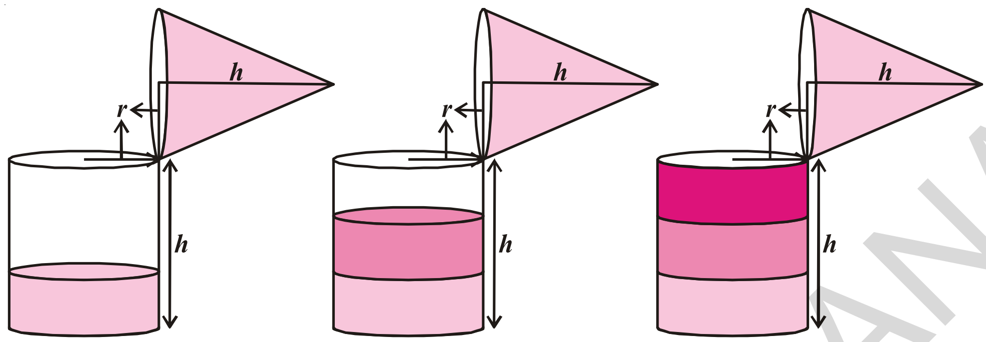


OP = 3.5ಸೆಂ.ಮೀ.; **AB = 10**ಸೆಂ.ಮೀ.

10.4.4 ನೇರವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ



ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಆಳತೆಯ ಎತ್ತರ ವುಳ್ಳ ಒಂದು ಶಂಕು ಮತ್ತು ಒಂದು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



i. ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯ ತುಂಬ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿ, ನೀರನ್ನು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಗೆ ಬಗ್ಗಿಸಿರಿ. ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗವೇ ತುಂಬುತ್ತದೆ.

ii. ಮತ್ತೊಂದು ಬಾರಿ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿ, ಆ ನೀರನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಸುರಿದರೆ, ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಪಾತ್ರೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬಬದು.

iii. ಮೂರನೇ ಬಾರಿ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ತುಂಬ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿ, ಆ ನೀರನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸುರಿದರೆ, ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಪಾತ್ರೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಘನಫಲಕ್ಕೂ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲದ ಮಧ್ಯೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

ಮೂರು ಬಾರಿ ಶಂಕುವಿನ ಪಾತ್ರೆಯಿಂದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬಿ ಹಾಕಿದ ನಂತರ ಸಿಲಿಂಡರಾಕೃತಿ ಪಾತ್ರೆ ತುಂಬಿದೆ. ಅಂದರೆ , ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಎತ್ತರಹೊಂದಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ 3 ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ಇಲ್ಲಿ 'r' ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 'h' ಎತ್ತರ.

ಉದಾಹರಣೆ-6. ಒಂದು ಮೆಕ್ಕೆ ಜೋಳ ತೆನೆ ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಅಗಲ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಇರುವ ಪ್ರದೇಶದ ತ್ರಿಜ್ಯ 1.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ (ಉದ್ದ) 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪ್ರತಿ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಸುಮಾರಾಗಿ 4 ಬೀಜಗಳು ಇದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಬೀಜಗಳಿರುತ್ತವೆ?

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $l = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{(1.4)^2+(12)^2}\,cm.$

$= \sqrt{145.96} = 12.08$ ಸೆಂ.ಮೀ. (ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 12.08$ ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}

$= 53.15$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ

$= 53.2$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ (ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳ ತೆನೆಯಲ್ಲಿ 1 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4.

ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳ ತೆನೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸೀರ್ಣದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಬೀಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$= 53.2 \times 4 = 212.8 = 213$ (ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳ ತೆನೆಯಲ್ಲಿ ಸುಮಾರಾಗಿ 213 ಬೀಜಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ7. 5.6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 158.4 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 5.6 ಸೆಂ.ಮೀ , ಎತ್ತರ = h, ಓರೆ ಎತ್ತರ = l

ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi r l = 158.4$ ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6} = \frac{18}{2} = 9 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$

$l^2 = r^2 + h^2$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು

$h^2 = l^2 - r^2 = 9^2 - (5.6)^2$

$= 81 - 31.36$

$= 49.64$

$h = \sqrt{49.64}$

$h = 7.05$ ಸೆಂ.ಮೀ. (ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಉದಾಹರಣೆ8. ಒಂದು ಗುಡಾರ ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವಿನ ಹಾಗೆ ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ವ್ಯಾಸ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ 24 ಮೀಟರುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ 11 ಮೀ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 5 ಮೀಟರುಗಳು. ಗುಡಾರ ತಯಾರುಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಬಟ್ಟೆ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹10 ರಂತೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ : ಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ = ಶಂಕುವಿನ ವ್ಯಾಸ = 24 ಮೀ

$\therefore$ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 12 ಮೀ.

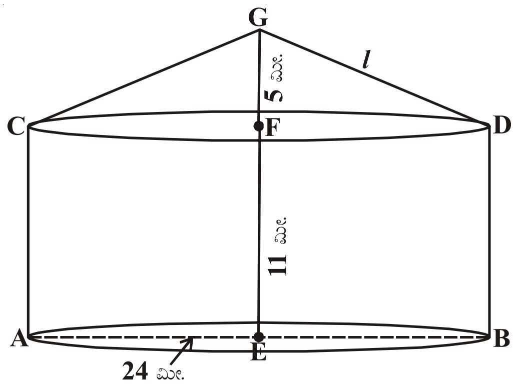
ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ = 11 ಮೀ = h_1

ಸ್ತಂಭದ ಓರೆ ಎತ್ತರ = 5ಮೀ = h_2

ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ 'l' ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ.

$l = GD = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ ಮೀ

ಬೇಕಾದ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸ್ತಂಭದ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.



$= 2\pi rh_1 + \pi rl$

$= \pi r(2h_1 + l)$

$= \frac{22}{7} \times 12(2 \times 11 + 13)$ ಮೀ^{2}

$= \frac{22 \times 12}{7} \times 35$ ಮೀ^{2}

$= 22 \times 60$ ಮೀ^{2}

$= 1320$ ಮೀ^{2}

ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ = ₹10 ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ

$\therefore$ ಬಟ್ಟೆಯ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು = ಬೆಲೆ × ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ₹10 × 1320

= ₹13,200.

ಉದಾಹರಣೆ-9: ಸೈನ್ಯವು ತನ್ನ ಬೇಸ್‌ಕ್ಯಾಂಪ್ ಗೋಸ್ಕರ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಎತ್ತರ 3 ಮೀ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 8 ಮೀಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗುಡಾರವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ

(i) ಗುಡಾರ ತಯಾರುಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ಚ.ಮೀ.ಗೆ ₹ 70 ರಂತೆ ಆದರೆ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು?

(ii) ಪ್ರತಿ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ 3.5 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಾಳಿ ಅವಸರವಾದರೆ ಗುಡಾರದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ಗುಡಾರದ ವ್ಯಾಸ = 8 ಮೀ. .

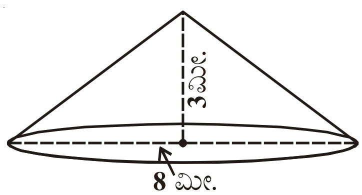
$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4$ ಮೀ. .

ಎತ್ತರ = 3 ಮೀ.

ಓರೆ ಎತ್ತರ (l) $= \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25} = 5$ ಮೀ.



$\therefore$ ಗುಡಾರದ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5 = \frac{440}{7}$ ಮೀ.^{2}

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$

$= \frac{352}{7}$ ಘ.ಮೀ.

(i) ಗುಡಾರದ ತಯಾರಿಕೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಟ್ಟೆಯ ಖರ್ಚು

= ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಯೂನಿಟ್ ಬೆಲೆ

$= \frac{440}{7} \times 70$

= ₹4400

(ii) ಗುಡಾರದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$= \dfrac{\text{ಕೋನಾಕೃತಿ ಗುಡಾರದ ಘನಫಲ}}{\text{ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಬೇಕಾದ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ}}$

$= \frac{352}{7} \div 3.5$

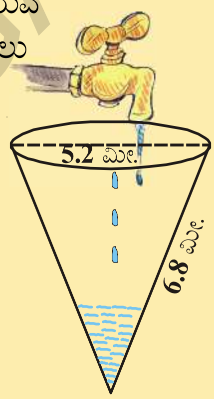
$= \frac{352}{7} \times \frac{1}{3.5} = 14.36$

= 14 ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು (ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಅಭ್ಯಾಸ - 10.3

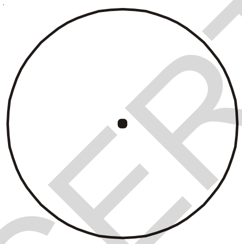
1. ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 38.5 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ, ಘನಫಲ 77 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ 462 ಘ.ಮೀ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಮೀಟರುಗಳಾದರೆ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 308 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರ 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ
   (i) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ (ii) ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಗೆ 25 ಪೈಸೆಯಂತೆ ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚು ₹176 ಆದರೆ, ಓರೆ ಎತ್ತರ 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದಾಗ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದದಿಂದ 216° ಸೆಕ್ಟರ್ ಕೋನವಿರುವ ಸೆಕ್ಟರ್‌ನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ. ಅದರ ಅಂಚುಗಳೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಬಗ್ಗಿಸಿದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಡೇರೆಯ ಎತ್ತರ 9 ಮೀ ಅದರ ವ್ಯಾಸ 24 ಮೀ ಆದರೆ ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು? ಡೇರೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ಚ.ಮೀ. ₹14 ಆದರೆ ಒಟ್ಟು ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

7. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $1159\frac{5}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಅದರ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $254\frac{4}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಡೇರೆ 4.8 ಮೀ ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕಾರ ವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 4.5 ಮೀ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 10.8 ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಹಾಗೆ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಡೇರೆಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?
9. 8 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರ, 6 ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯ ಯಾಗಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಆಕೃತಿಯ ಡೇರೆಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ 3 ಮೀ ಅಗಲವಾಗಿರುವ ಟಾರ್ಪಲಿನ್ ಬಟ್ಟೆ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು? (ಮಾರ್ಜಿನ್‌ನ್ನು, ವ್ಯರ್ಥವಾಗುವ ಬಟ್ಟೆಯನ್ನು ಸಹ ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸುಮಾರಾಗಿ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಟಾರ್ಪಲಿನ್ ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ($\pi = 3.14$)
10. ಒಂದು ಜೋಕರ್‌ನ ಟೋಪಿ 7.ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 27 ಸೆಂ.ಮೀ.ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅಂತಹ ಹತ್ತು ಟೋಪಿಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಯುಳ್ಳ ಬಟ್ಟೆ ಅವಶ್ಯಕ.
11. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಒಂದು ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪಾತ್ರೆಯ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 5.2 ಮೀ. ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರ 6.8 ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ನೀರು ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 1.8 ಘ.ಮೀ. ರಂತೆ ತುಂಬಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಪಾತ್ರೆ ತುಂಬಿಸಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲವೆಷ್ಟು?



12. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ಶಂಕುಗಳ ಘನಫಲಗಳು 12π ಮತ್ತು 96π ಘನ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು. ಶಂಕುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 15π ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, ಆದರೆ ಎರಡನೆ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ಎಷ್ಟು?

10.5 ಗೋಳ


(i)


(ii)


(iii)

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳೆಲ್ಲವೂ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವವೇ ಅಲ್ಲವೇ! ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯವಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

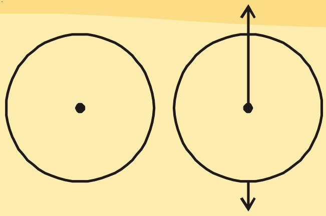
ಮೊದಲನೆ ಚಿತ್ರ ವೃತ್ತ ಇದನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಇರುವ ಕಾರಣ ಅದು ಒಂದು ಸಮತಲ ಚಿತ್ರ. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವೇ ವೃತ್ತ.

ಉಳಿದ ಚಿತ್ರಗಳು ಘನಾಕೃತಿಗಳು. ಈ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು 'ಗೋಳ'ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

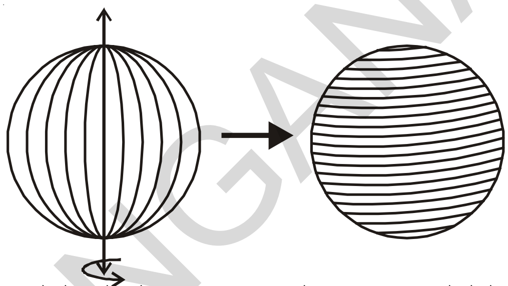
ಗೋಳ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿ. ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವೇ ಗೋಳ. ದತ್ತ ಬಿಂದು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ. ಸ್ಥಿರ ದೂರ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಅದರ ವ್ಯಾಸದ ಮೂಲಕ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರಿ. ಈಗ ಆ ಎರಡು ಕೊನೆಗಳನ್ನು ಹಿಡಿದು ತಿರುಗಿಸಿ. ಸಮವೇಗದಿಂದ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.



10.5.1 ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ



ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಒಂದು ರಬ್ಬರು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಸೂಜಿಯನ್ನು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಚುಚ್ಚಿರಿ. ಸೂಜಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ದಾರವನ್ನು ಸುತ್ತಿರಿ. ಪಿನ್ನುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಜಿ ಸರಿಯಾದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನೋಡಿರಿ.ಸೂಜಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಅದರ ಕೊನೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ನಿಧಾನವಾಗಿ ಸೂಜಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿರಿ.

ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಚೆಂಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತ ಗಳನ್ನು ದಾರವನ್ನು ಬಳಸಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

ಚೆಂಡನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಚ್ಚಲು ಬ ಳಸುವ ತಂತಿ/ ದಾರ ನಾಲ್ಕು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಚ್ಚಿ ಇಡಲು ಸರಿಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಚೆಂಡಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ನಾಲ್ಕು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಇದರಿಂದ (r) ತ್ರಿಜ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಅದೇ (r) ತ್ರಿಜ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4 \times$ ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 4\,\pi r^2$

ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \mathbf{4\,\pi r^2}$

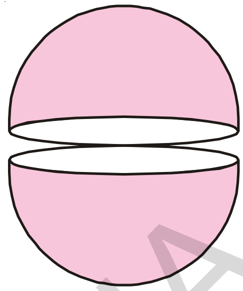
ಇಲ್ಲಿ 'r' ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀವು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಪದ್ಧತಿ ಯಿಂದ ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಾ?

10.5.2 ಅರ್ಧಗೋಳ

ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ಸಮತಲವು ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವು ಅರ್ಧಗೋಳ.



ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ಅರ್ಧಗೋಳ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಗೋಳ ಕೇವಲ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ ಮುಖವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಗೋಳ ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ಸಹ ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

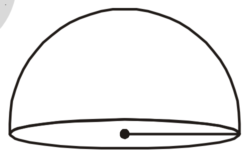
ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ?

ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ಅಥವಾ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅರ್ಧಗೋಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ **ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.**

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\ \pi r^2$$



$\therefore$ **ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** $= 2\ \pi r^2$

ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರ

ಆದರಿಂದ ಆದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2$

ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಥವಾ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ, ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

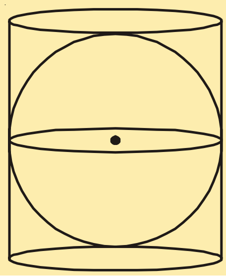
$$= 2\ \pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\ \pi r^2.$$

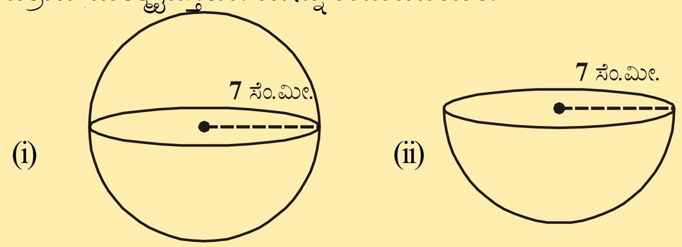
ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 3\pi r^2$

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ರಿ:

1. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ವಸ್ತುವುಗಳಲ್ಲಿ r ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ
   (i) ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?
   (ii) ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?
   (iii) (i) ಮತ್ತು (ii) ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



10.5.3 ಗೋಳದ ಘನಫಲ

ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಗೋಳವನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಗೋಪುರ(ಪಿರಮಿಡ್)ಗಳ ಶೃಂಗಗಳೆಲ್ಲಾ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏಕೀಭವಿಸುವ ಹಾಗೆ ಊಹಿಸಿದರೆ ಚಿತ್ರ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

1. ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು 'r' ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.
2. 'r' ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಗೋಳವನ್ನು 'n' ಸರ್ವಸಮ ಗೋಪುರಗಳಾಗಿ ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.
3. ಒಂದು ಗೋಪುರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿ ಗೋಪುರದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಗೋಪುರದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A_1, A_2, A_3..... ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

   ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮ ಆದರೆ,

   ಗೋಪುರದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3} \times$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\times$ ಎತ್ತರ

   $$= \frac{1}{3} A_1 r$$

4. 'n' ಗೋಪುರಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ

   'n' ಗೋಪುರಗಳ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \frac{1}{3} A_3 r + \ldots$ n ಬಾರಿ

   $$= \frac{1}{3} r\,[A_1 + A_2 + A_3 + \ldots \text{ n ಬಾರಿ}]$$

$$= \frac{1}{3} \times A\,r$$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + ...$ n ಬಾರಿ = 'n' ಗೋಪುರಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

5. ಎಲ್ಲಾ ಗೋಪುರಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ, ಗೋಳದ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮ ಮತ್ತು ಗೋಪುರಗಳ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಸುಮಾರಾಗಿ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮ. (i.e. $4\pi r^2$).

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}(4\pi r^2)\,r$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ ಘನ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

ಇಲ್ಲಿ 'r' ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ

ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಇದರ ಘನಫಲ, ಗೋಳದ ಘನಫಲದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆಯೇ?.

$\therefore$ ಅರ್ಧಗೋಳ ಘನಫಲ $= \frac{1}{2}$ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

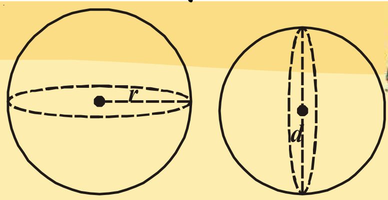
$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

[**ಸೂಚನೆ :** ಕಲ್ಲಂಗಡಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೀವು ಸಹ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಹುದು]

ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಗೋಳಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



$r = 3$ಸೆಂ.ಮೀ. $d = 5.4$ಸೆಂ.ಮೀ.

2. 6.3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ -10. ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 154 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{7}{2} = 3.5\text{ಸೆಂ.ಮೀ}$$

ಉದಾಹರಣೆ-11. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆ ಕಲ್ಲಿನಿಂದ ತಯಾರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ದಪ್ಪವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅದರ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ 35 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಪಾತ್ರೆಯ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

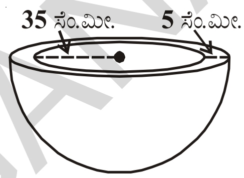
ಪರಿಹಾರ: ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ R, ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ‘r’, ದಪ್ಪ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore$ R = (r + 5) ಸೆಂ.ಮೀ = (35 + 5) ಸೆಂ.ಮೀ= 40 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಕಂಕಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \pi(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$$



$$= \frac{22}{7}(3R^2 + r^2) = \frac{22}{7}(3 \times 40^2 + 35^2)\text{ಸೆಂ.ಮೀ.}^2$$

$$= \frac{6025 \times 22}{7}\text{ಸೆಂ.ಮೀ.}^2$$

$$= 18935.71 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}^2\text{(ಸುಮಾರಾಗಿ).}$$

ಉದಾಹರಣೆ-12. ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ಮೇಲ್ಛಾವಣಿ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಭವನ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ) ಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಬೇಕು. ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ 17.6 ಮೀ.ಆದರೆ 10 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.ಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು 5 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಭವನಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪರಿಹಾರ : ಭವನದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರವೇ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಬೇಕು. ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಪಾದದ ಪರಧಿ = 17.6 ಮೀ. ಆದ್ದರಿಂದ 17.6 = $2\pi r$

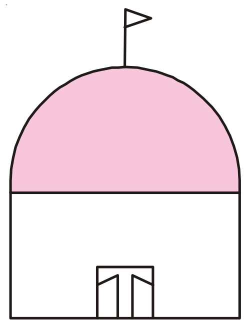
ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ ಮೀ

$= 2.8$ ಮೀ

ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ ಮೀ^{2}.

$= 49.28$ ಮೀ^{2}.



ಚಿತ್ರ 1

100 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚು = ₹5

1 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚು , = ₹ 500

ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು = ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24640.

ಉದಾಹರಣೆ13. ಒಂದು ಸರ್ಕಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಮೋಟಾರ್ ಸೈಕಲಿಸ್ಟ್ ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ 7 ಮೀ. ಸೈಕಲಿಸ್ಟು ವಿನ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಾಡಲು ಅವಕಾಶವಿರುವ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ = 7 ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ = 3.5 ಮೀ ಆದ್ದರಿಂದ ವಿನ್ಯಾಸಕ ಸುತ್ತುವ ಪ್ರದೇಶ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮ.

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 m^2$$

$$= 154 \text{ ಚ.ಮೀ.}^2.$$

ಉದಾಹರಣೆ14. ಷಾಟ್‌ಪುಟ್‌ಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಲೋಹದ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 4.9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಲೋಹದ ಸಾಂದ್ರತೆ 7.8 ಗ್ರಾಂ/ಸೆಂ.ಮೀ^{3}. ಆದರೆ ಷಾಟ್‌ಪುಟ್‌ನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಷಾಟ್‌ಪುಟ್ ಲೋಹದ ಗೋಳ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ಗೋಳದ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಸಾಂದ್ರತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಗೋಳದ ಘನಫಲವನನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಈಗ ಗೋಳದ ಘನಫಲ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ}^3$$

$$= 493 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ}^3 \text{(ಸುಮಾರಾಗಿ)}$$

1 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಲೋಹದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = 7.8 ಗ್ರಾಂ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಷಾಟ್‌ಪುಟ್‌ನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = 7.8 × 493 ಗ್ರಾಂ

= 3845.44ಗ್ರಾಂ = 3.85 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.(ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಉದಾಹರಣೆ 15. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅದರಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = ಅರ್ಧಗೋಳ ಘನಫಲ

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ}^3$$

$$= 89.8 \text{ಸೆಂ.ಮೀ}^3 \text{ (ಸುಮಾರಾಗಿ).}$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 10.4

1. ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $1018\frac{2}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?
3. ಗ್ಲೋಬಿನಲ್ಲಿ ಭೂಮಧ್ಯ ರೇಖೆ ಉದ್ದ 44 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?
4. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಚೆಂಡಿನ ವ್ಯಾಸ 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇಂತಹ 5 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪದಾರ್ಥದ ಪ್ರಮಾಣವೆಷ್ಟು?
5. ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತ 2 : 3. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. . (π = 3.14 ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)
7. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರ ಬೆಲೂನಿನ ವ್ಯಾಸ 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ 28 ಸೆಂ.ಮೀ ವರೆಗೆ ದಪ್ಪವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗಾಳಿಯನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. ಈ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿರುವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 0.25 ಸೆಂ.ಮೀ. ದಪ್ಪ ವಿರುವ ಹಿತ್ತಾಳೆಯಿಂದ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪಾತ್ರೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಗಿರುವ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಒಂದು ಸೀಸದ ಚೆಂಡಿನ ವ್ಯಾಸ 2.1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅದನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೀಸದ ಸಾಂದ್ರತೆ 11.34 ಗ್ರಾಮುಗಳು. ಆದರೆ ಚೆಂಡಿನ ತೂಕವೆಷ್ಟು?
10. ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಲೋಹದ ವ್ಯಾಸ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ $3\frac{1}{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಅದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಒಂದು ಗೋಳವಾಗಿ ತಯಾರುಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ವ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು?
11. 10.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದಾದ ಹಾಲಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವೆಷ್ಟು?
12. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯ ವ್ಯಾಸ 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ ದ್ರವವನ್ನು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕಾರದ ಸೀಸೆಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬುತ್ತಾ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿನ ದ್ರವವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸೀಸೆಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು?

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

1. ಘನ, ಆಯತಘನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆರು ಮುಖಗಳಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು, ಮೇಲಿನ ಮುಖ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನಮುಖ ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ಪಟ್ಟಕಗಳು.
2. ಉದ್ದ l, ಅಗಲ 'b' ಎತ್ತರ 'h' ಯಾಗಿ ಇರುವ ಆಯತ ಘನದ

    ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\,(lb + bh + lh)$

    ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\,h\,(l + b)$

    ಘನಫಲ $= lbh$

3. ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 'l' ಯಾಗಿರುವ ಘನದ

ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 6l^2$

ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4l^2$

ಘನಫಲ $= l^3$

4. ಒಂದೇ ಪಾದ, ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಪುರ, ನೇರ ಪಟ್ಟಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಗೋಪುರದ ಘನಫಲ, ಪಟ್ಟಕ ಘನಫಲಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗ ಇರುತ್ತದೆ.

5. ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗಳಾಗಿ, ಕೊನೆಗಳು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಸ್ತುವನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಎನ್ನುವರು. ಇವುಗಳ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಕೊನೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆ ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಅಥವಾ ನೇರ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

6. 'r' ತ್ರಿಜ್ಯ, 'h' ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ

- ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi rh$
- ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi r(r + h)$
- ಘನಫಲ $= \pi r^2 h$

7. ಪಾದ ವೃತ್ತವಾಗಿ, ಇದಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಭಾಗ ಶೃಂಗ ಹೊಂದಿರುವ ಆಕೃತಿಯೇ ಶಂಕು. ಶಂಕುವಿನಿಂದ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಶಂಕುವನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತ ಶಂಕು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

8. ಶಂಕುವಿನ ಪಾದ ಅಂಚಿನ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡ ಓರೆ ಎತ್ತರ (l) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$$l^2 = h^2 + r^2$$

9. 'r' ತ್ರಿಜ್ಯ, 'h' ಎತ್ತರ, 'l' ಓರೆ ಎತ್ತರವಾಗಿರುವ ಶಂಕುವಿನ

- ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$
- ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r(r + l)$

10. ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಘನಫಲದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

i.e. ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

11. ಗೋಳ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿ ಒಂದು ದತ್ತ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವನ್ನು ಗೋಳ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ದೂರವನ್ನು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

12. ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ಆದರೆ,

- ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4\pi r^2$
- ಘನಫಲ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

13. ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಸಮತಲ ಗೋಳವನ್ನು ಮಾಡಿದ ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಅರ್ಧಗೋಳ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

- ಅರ್ಧಗೋಳ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi r^2$
- ಅರ್ಧಗೋಳ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 3\pi r^2$
- ಅರ್ಧಗೋಳ ಘನಫಲ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ?

8 × 8 ಮ್ಯಾಜಿಕ್ ಚದರವನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬಲ್ಲಿರಾ?

1 ರಿಂದ 64 ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ (1) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಚದರ ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿರಿ. ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಗೆರೆಗಳು ಎಳೆಯಿರಿ. ಮ್ಯಾಜಿಕ್ ಚೌಕವನ್ನು ಏರ್ಪಡುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಕರ್ಣಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಪೂರಕಗಳಿಂದ ಚಿತ್ರ (2) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿರಿ. (ಕನಿಷ್ಠ, ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವಾದವು ಗಳನ್ನು ಮ್ಯಾಜಿಕ್ ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರಕಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ) ನೀವು ಮತ್ತಷ್ಟು ಮ್ಯಾಜಿಕ್ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸಿರಿ.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

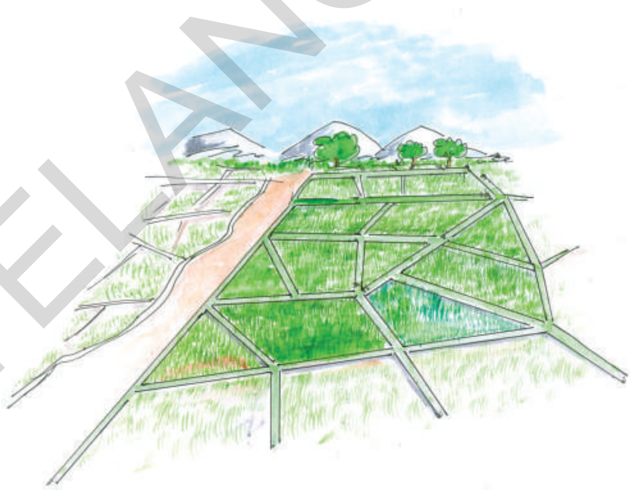
64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

* ಮ್ಯಾಜಿಕ್ ಚೌಕ (magic square) ಅಂದರೆ ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಿನ್ಯಾಸ, ಇದರಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲು, ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಾನ.

11 ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

11.1 ಪೀಠಿಕೆ :

ನಿಮ್ಮ ಗ್ರಾಮ ಅಥವಾ ಪಟ್ಟಣ ದ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ ಹೊಲ ಗದ್ದೆಗಳನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದಿರಾ? ಈ ಹೊಲಗಳು ಬಹಳ ರೈತರಿಗೆ ಸೇರಿದ ಬಹಳ ಮಡಿಗಳು ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಹೊಲಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿವೆಯಾ? ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯಾ? ಈ ಹೊಲಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ ವಿಭಜಿಸಿ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದರೆ ಆವರು ಏನು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ? ಆವರಿಗೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಇರುವ ಭಾಗಗಳು ಬೇಕಾದರೆ ಏನು ಮಾಡಬೇಕು ?

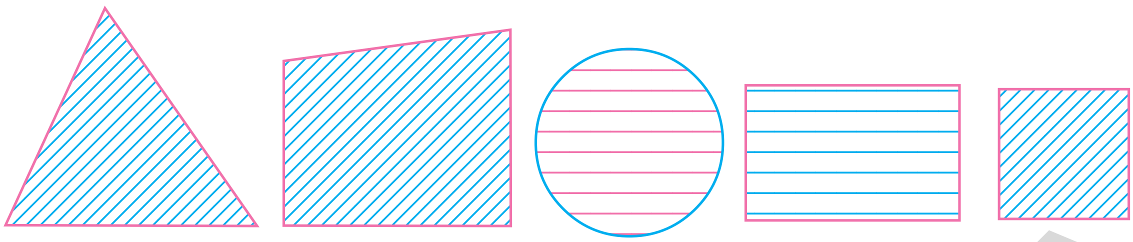


ಒಂದು ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬೀಜಗಳನ್ನು ಬಿತ್ತಬೇಕೋ ಅಥವಾ ಎಷ್ಟು ಗೊಬ್ಬರ ಹಾಕಬೇಕೆಂದು ಹೇಗೆ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತೆ? ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೂ ಇದಕ್ಕೂ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧ ವಿದೆಯಾ?

ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಕ್ಷೇತ್ರ ಸರಿಹದ್ದುಗಳ ಪುನರ್ವ್ಯಸ್ಥೀಕರಣ ಮತ್ತು ಬೇಕಾದ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದು ಏರ್ಪಾಟಾಗಿ ಆಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದುವುದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗಿದೆ. ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹರಿಯುವ ನೈಲ್ ನದಿಗೆ ಬರುವ ಪ್ರವಾಹ (Floods) ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಓದಿಯೇ ಇರುತ್ತೀರಿ. ನೈಲು ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹಗಳಿಂದ ಭೂಮಿಯ ಸರಿಹದ್ದುಗಳು ಕೊಚ್ಚಿಕೊಂಡು ಹೋಗುವುದು, ಪುನಃ ನಿರ್ಮಾಣ ಮಾಡುವುದು ಇದರಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಭಾಗ . ಕೆಲವು ಹೊಲಗಳ ಆಕಾರಗಳು ನಮಗೆ ಚೌಕ, ಆಯತ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಹೋಲುವಂತಿರುತ್ತವೆ. ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಅಕ್ರಮಕಾರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಮೂಲ ಆಕಾರಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಾವು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ತ್ರಿಭುಜ, ಚೌಕ, ಆಯತ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೋ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಆನ್ವೇಷಿಸೋಣ. ಇವು ಹೇಗೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ ? ಅಸಲು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂದರೇನು? ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

11.2 ಸಮತಲೀಯ ಪ್ರದೇಶಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು :

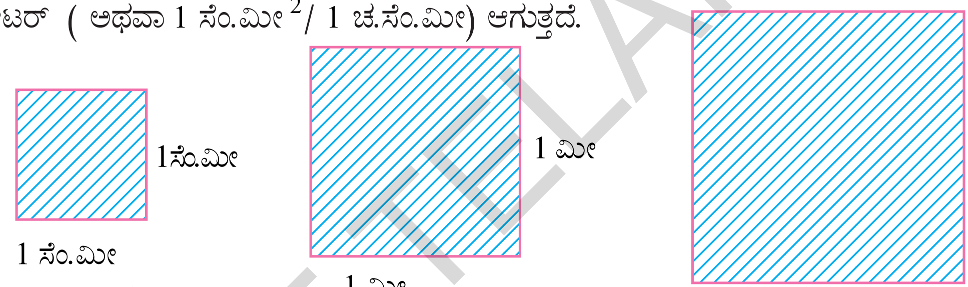
ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳ ಆವೃತ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಆಕ್ರಮಿಸಲಾದ ಭಾಗವನ್ನು ಆ ಚಿತ್ರದ ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆಂದು ಜ್ಞಾಪಕಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದರ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಆ ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶ ಒಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಪ್ರದೇಶ | ಚತುರ್ಭುಜಾಕಾರ ಪ್ರದೇಶ | ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪ್ರದೇಶ | ಆಯತಾಕಾರ ಪ್ರದೇಶ | ಚೌಕಾಕಾರ ಪ್ರದೇಶ

ಒಂದು ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶ ಎನ್ನುವುದು ಅದರ ಸರಿಹದ್ದು ಮತ್ತು ಅಂತರ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ? ಈ ಪ್ರದೇಶದ ಪರಿಮಾಣ (ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) ಎಂದರೆ 10 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ., 215 ಚ.ಮೀ., 2 ಚ.ಕಿ.ಮೀ. , 3 ಹೆಕ್ಟಾರಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿತ್ರ ಒಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು (ಒಂದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ) ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಮತಲ ಸಂವೃತ ಭಾಗದಿಂದ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಪ್ರಮಾಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಪ್ರಮಾಣ ಉದ್ದ ಬಾಹು ಇರುವ ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹು ಇರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು 1 ಚದರ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್ (ಅಥವಾ 1 ಸೆಂ.ಮೀ ^{2}/ 1 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ) ಆಗುತ್ತದೆ.

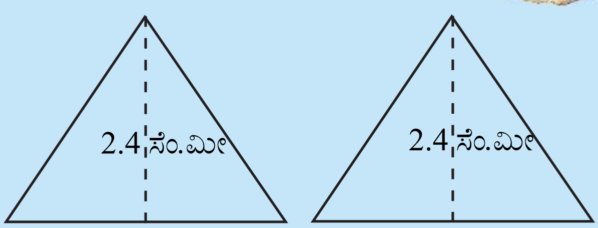


ಈ ವಿಧವಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಪದಗಳಾದ 1 ಚದರ ಮೀಟರ್ (1ಚ.ಮೀ) ,1ಚದರ ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್ ;1ಚದರ ಮಿಲ್ಲೀ ಮೀಟರ್ (1 ಚ.ಮಿ.ಮೀ) ನಂತವುಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಸರ್ವ ಸಮ ಚಿತ್ರಗಳ ಭಾವನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಮಗೆ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿವೆ. ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರ, ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

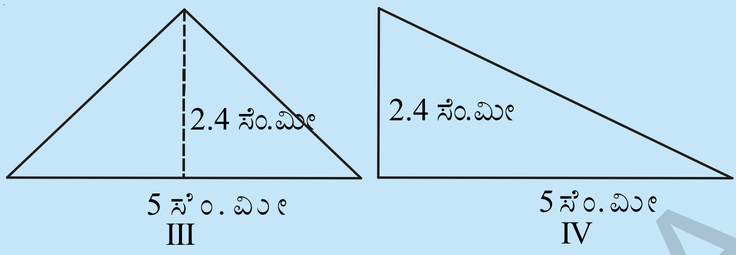
ಚಿತ್ರ I ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ II ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಎರಡರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎರಡರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ?

ನಕಲು ಕಾಗದ (ಟ್ರೇಸಿಂಗ್ ಪೇಪರ್) ವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನಕಲು ಮಾಡಿ, ಅಂಚುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜ I ನ್ನು ತ್ರಿಭುಜ II ರಿಂದ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಎರಡು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆಯಾ? ಅವು ಸರ್ವಸಮಗಳೇನಾ?

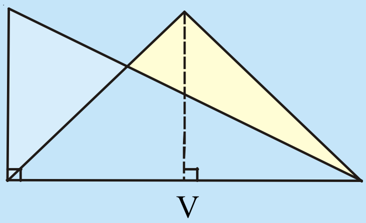


(i)

ಚಿತ್ರ III ಮತ್ತು IV ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಎರಡರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಾ? ಎರಡು ಸರ್ವಸಮಗಳೇನಾ?

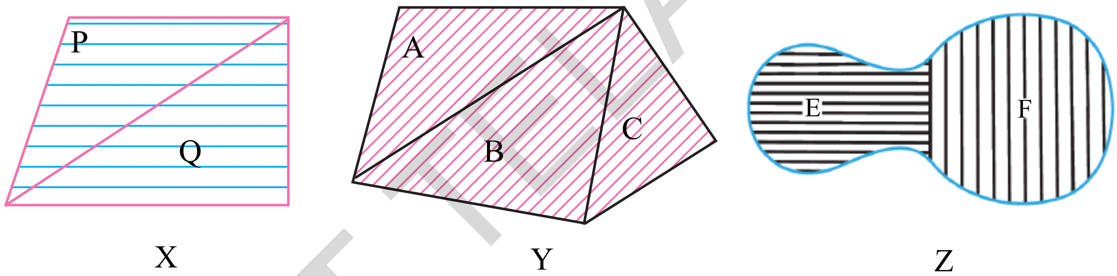


ಈಗ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನಕಲು ಮಾಡಿ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಚಿತ್ರ III ನ್ನು ಚಿತ್ರ IV ರಿಂದ ಪಾದಗಳು ಏಕೀಭವಿಸುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ(ಸಮಾನ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ) ಚಿತ್ರ Vರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಏಕೀಭವಿಸಿಲ್ಲ.



ಇದರಿಂದ ನಾವು ಚಿತ್ರ I ಮತ್ತು II ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಚಿತ್ರ III ಮತ್ತು IV ಗಳು ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಆದರೆ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ.

ಈಗ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ :



ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶಗಳು X, Y, Z ಗಳು ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಸಬಹುದು. ನಾವು ಪ್ರದೇಶಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ.

X ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = P ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +Q ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು.

ಅದೇರೀತಿಯಾಗಿ = (Y)ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = (A) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + (B)ವಿಸ್ತೀರ್ಣ+ (C) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

(Z)ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = (E) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + (F).ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎನುವುದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (ಯಾವುದೇ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ). ಇದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.

(**ಸೂಚನೆ** : ಈಗಿನಿಂದ ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (X) ನ್ನು (X)||ವಿ||ಆಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ)

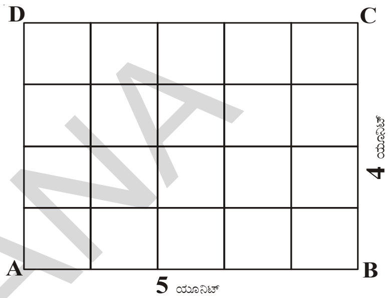
(i) ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ.

(A) ಮತ್ತು (B) ಗಳು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳಾದರೆ, ಆಗ (A)||ವಿ|| = (B)||ವಿ|| ಆಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಒಂದು ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು , ಆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಿತ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ. ಒಂದು ಸಮತಲ ಚಿತ್ರ (X) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎರಡು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗದಂತಹ ಸಮತಲ ಚಿತ್ರಗಳು P ಮತ್ತು Q ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ. ಆದ್ದರಿಂದ (X)||ವಿ|| | = (P)||ವಿ|| + (Q)||ವಿ|| .

11.3 ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :

ಒಂದು ಆಯತದಲ್ಲಿ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಗಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಆ ಆಯತ ಒಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಚದರ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮಾನ.



ABCD ಎನ್ನು ಆಯತದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ $\overline{AB}$ ಯು 5 ಯುನಿಟ್‌ಗಳು $\overline{BC}$ ಅಗಲವು 4 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$\overline{AB}$ ಅನ್ನು 5 ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ, $\overline{BC}$ ಅನ್ನು 4 ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಉದ್ದಕ್ಕೆ, ಅಗಲಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆದರೆ ಪ್ರತಿ ಭಾಗವು ಒಂದು ಚದರ ಯೂನಿಟ್ ಆಗುತ್ತದೆ. (ಏಕೆ?)

$\therefore$ ಆಯತದಲ್ಲಿ 5×4 ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ 20 ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಿಗೆ ಸಮ.

1 ಯೂನಿಟ್ ಇದನ್ನು *1* ಚದರ ಯೂನಿಟ್ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ

1 ಯೂನಿಟ್

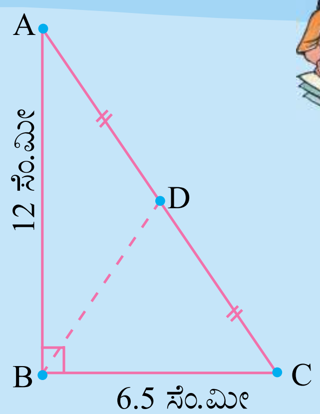
ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಉದ್ದ 'a' ಯುನಿಟ್‌ಗಳೂ, ಅಗಲ 'b' ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, ಆದರೆ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 'ab' ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂದರೆ ಅದರ '**ಉದ್ದ** $\times$ **ಅಗಲ** 'ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :

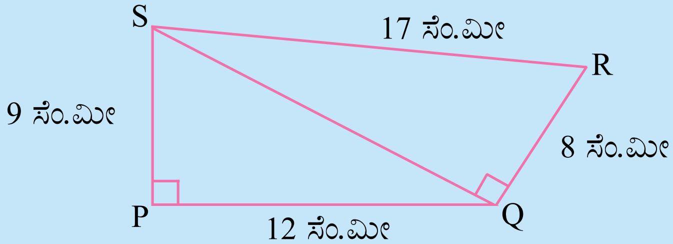
1. 1ಸೆಂ.ಮೀ. ಪ್ರಮಾಣವು 5 ಮೀಟರ್‌ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, 6 ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಯಾವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ?
2. 1 ಚ.ಮೀ. $= 100^2$ ಸೆಂ.ಮೀ ಎಂದು ರಜನಿ ಹೇಳುತ್ತಾಳೆ. ನೀವು ಇದು ಸರಿ ಎಂದು ನಂಬುವಿರಾ? ವಿವರಿಸಿರಿ

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.1

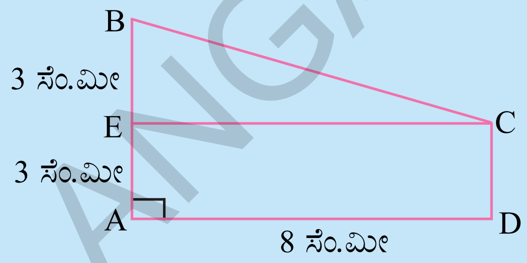
1. ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle ABC = 90^\circ$ ಸೆಂ.ಮೀ,AD = DC ಮತ್ತು AB = 12 ಸೆಂ.ಮೀ , BC = 6.5 ಆದರೆ ΔADB. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



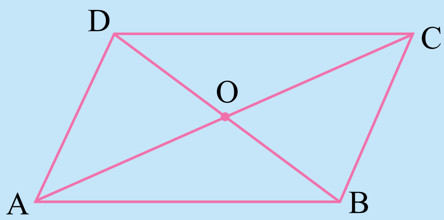
2. PQRS ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle QPS = \angle SQR = 90°$, PQ = 12 ಸೆಂ.ಮೀ, PS = 9 ಸೆಂ.ಮೀ, QR = 8 ಸೆಂ.ಮೀ, ಮತ್ತು SR = 17 ಸೆಂ.ಮೀ, ಆದರೆ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (**ಸೂಚನೆ** : PQRSನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿವೆ)



3. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ADCE ಒಂದು ಆಯತವಾದರೆ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (**ಸೂಚನೆ :** ABCD ನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿವೆ).



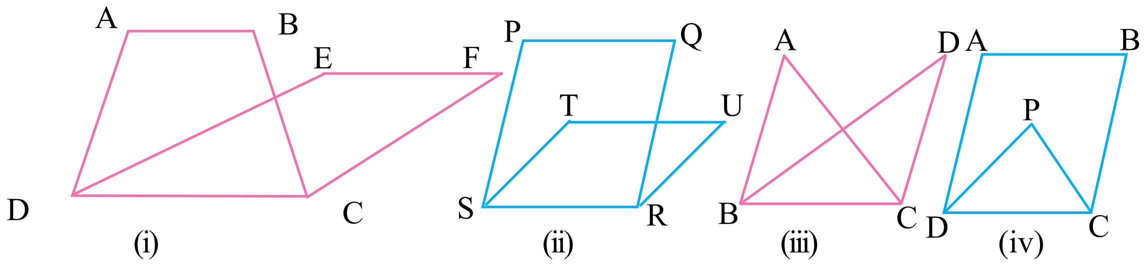
4. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಕರ್ಣಗಳು AC ಮತ್ತು BD ಗಳು 'O' ಹತ್ತಿರ ಖಂಡಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. (ΔAOD)||ವಿ|| = (ΔBOC) ||ವಿ|| ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. (ಸೂಚನೆ : ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳು ಸಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ)



11.4 ಒಂದೇ ಪಾದ ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಚಿತ್ರಗಳು :

ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಅಭ್ಯಾಸ ನಮಗೆ ಸರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಅವಗಾಹನೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಕರವಾಗುತ್ತದೆ.

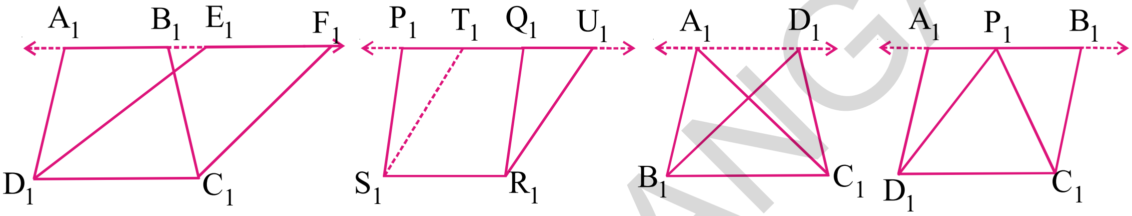
ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ :



(i) (ii) (iii) (iv)

ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ EFCD ಎರಡಕ್ಕೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು CD. ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಮತ್ತು EFCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎನ್ನುವವು ಒಂದೇ ಪಾದ CDಯ ಮೇಲಿವೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಚಿತ್ರ (ii) ನಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ಮತ್ತು TURS ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಪಾದ ಇದೆ. ಚಿತ್ರ (iii)ನಲ್ಲಿ ABCಮತ್ತು DBC ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಇದೆ. ಚಿತ್ರ (iv) ನಲ್ಲಿ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ತ್ರಿಭುಜ PCD ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಮೇಲೆ ಇವೆ. ಇವುಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ನಾಲ್ಕು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಆದರೆ ಇವು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ A B, E F ಮತ್ತು PQ, T U ಮೇಲೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತಿಲ್ಲ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಚಿತ್ರ (i) ನಲ್ಲಿ A, B, E, F ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಳಲ್ಲ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ P, Q, T, U ಸಹ ಚಿತ್ರ (iii) ಮತ್ತು (iv)ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ ?

ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ



(v) (vi) (vii) (viii)

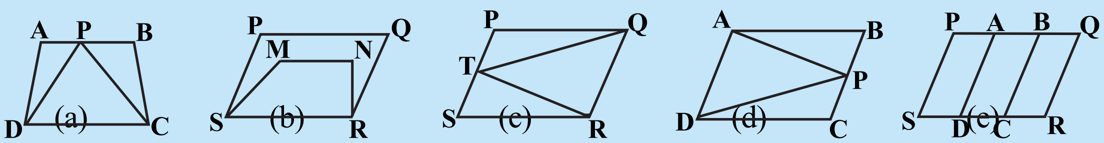
ಚಿತ್ರಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಚಿತ್ರ (v)ನಲ್ಲಿ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ $A_1B_1C_1D_1$ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ $E_1F_1C_1D_1$ ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು A_1F_1 ಮತ್ತು D_1C_1 ಗಳ ಮಧ್ಯ ಇವೆ. A_1, B_1, E_1, F_1 ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಗಳು ಮತ್ತು $A_1F_1 \parallel D_1C_1$ ಆಗಿವೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಚಿತ್ರ(vi)ನಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು $P_1Q_1R_1S_1$ ಮತ್ತು $T_1U_1R_1S_1$ ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ S_1R_1 ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು P_1U_1 ಮತ್ತು S_1R_1 ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. ಚಿತ್ರ (vii) ಮತ್ತು (viii) ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ?

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಚಿತ್ರಗಳೆಂದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು (ಪಾದ) ಮತ್ತು ಪಾದಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಶೃಂಗಗಳೆಲ್ಲವು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರಬೇಕೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ?

ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪಾದ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು) ವನ್ನು, ಎರೆಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

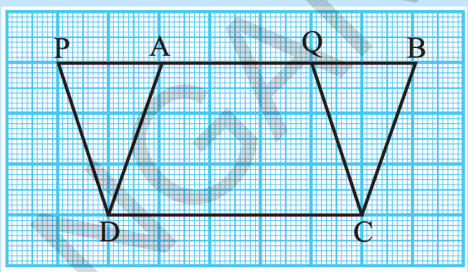


11.5 ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು :

ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ನಡುವೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧ ಇದೆಯೇ? ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಮುನ್ನ ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿನೋಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ : (ಚೌಕಳಿ ಹಾಳೆ)

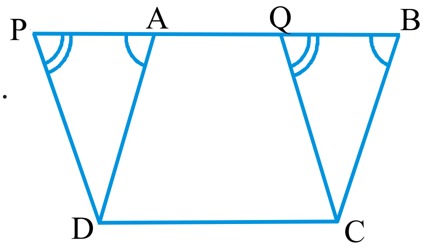
ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ABCD ಮತ್ತು PQCD ಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಈ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು PB ಮತ್ತು DC ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ DCQA ಚಿತ್ರ ಭಾಗವು ಬಾಹುವು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಗವೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ΔDAP ಮತ್ತು ΔCBQ ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಲಾದರೆ ಆಗ (PQCD)||ವಿ||= (ABCD)||ವಿ||ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 11.1 : ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ.

ಸಾಧನೆ : ABCD ಮತ್ತು PQCD ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಮೇಲೆ ನಿಂತಿವೆ. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು DC ಮತ್ತು PBಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



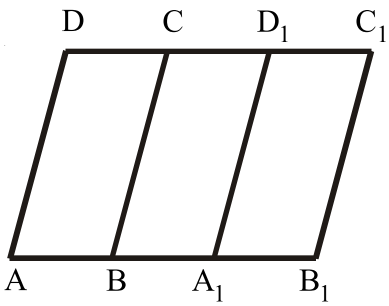
ΔDAP ಮತ್ತು ΔCBQ ಗಳಲ್ಲಿ

PD || CQ ಮತ್ತು PB ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆ $\angle DPA = \angle CQB$ ಮತ್ತು AD || CB ಮತ್ತು PB ಒಂದು ಛೇಧಕ ರೇಖೆ $\angle DAP = \angle CBQ$. ಹೀಗೆಯೇ PQCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ PD = QC ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ΔDAP , ΔCBQ ಗಳು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ.

ಆದ್ದರಿಂದ (PQCD)||ವಿ|| = (AQCD)||ವಿ|| + (DAP) ||ವಿ||

= AQCD) ||ವಿ|| + (CBQ)||ವಿ|| =

(ABCD)||ವಿ||ಆಗುತ್ತದೆ.



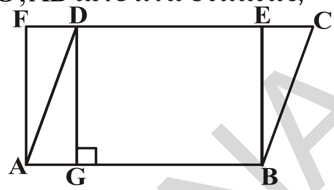
ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಚೌಕಳಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿನೋಡಿರಿ. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ಅವು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇದ್ದರೂ ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ರೇಷ್ಮ ವಾದಿಸಿದಳು. ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಪಾದ ಇದ್ದರೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತೆ ಎಂದಳು. ಅವಳ ವಾದನೆಯ ಅವಗಾಹನೆಗಾಗಿ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$AB = A_1B_1$ ಆದರೆ $A_1B_1C_1D_1$ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ABCD, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೇಲೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಇಟ್ಟರೆ ಶೃಂಗ A ಶೃಂಗ A_1 ಮೇಲೆ,ಶೃಂಗ B ಶೃಂಗ B_1 ಮೇಲೆ ಬಂದಿವೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\overline{C_1D_1}$,CD. ಮೇಲೆ ಐಕ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆಗ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ

ಪಾದಗಳ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೂ, ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೂ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ -1: ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABEF ಒಂದು ಆಯತ DG , AB ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವಾದರೆ,



(i) (ABCD)||ವಿ|| = (ABEF)||ವಿ||

(ii) |(ABCD)||ವಿ|| = AB × DG ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : (i) ಆಯತ ಕೂಡ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೇ

$\therefore$ ||ವಿ|| (ABCD) = ||ವಿ||(ABEF)| ..... (1)

(ಒಂದೇ ಪಾದ ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು)

(ii) (ABCD)||ವಿ|| = (ABEF)||ವಿ|| ($\because$ (1) ರಿಂದ)

= AB × BE ($\because$ ABEF ಒಂದು ಆಯತ)

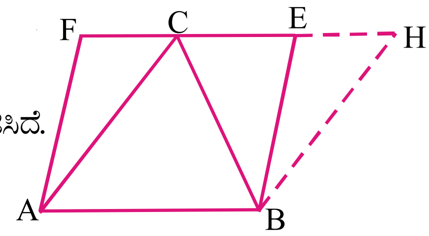
= AB × DG ($\because$ DG $\perp$ AB ಮತ್ತು DG = BE)

ಆದ್ದರಿಂದ (ABCD)||ವಿ|| = AB × DG

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ ನಮಗೆ " ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅದರ ಪಾದ (ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಾಹು) ಮತ್ತು ಆದರ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ (ಎತ್ತರ)ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ " ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABEF ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ AB ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು AB ಮತ್ತು EF ಗಳ ಮಧ್ಯ ಇದ್ದರೆ (ΔABC) $=\frac{1}{2}$(ABEF)||ವಿ|| ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : BH || AC ಆಗುವಂತೆ B ಯಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ FE ಅನ್ನು H ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.



$\therefore$ ABHC ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಕರ್ಣ BC ಇದನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದೆ.

$\therefore$ (ΔABC)||ವಿ|| = (ΔBCH)||ವಿ||

$= \frac{1}{2}$(ABHC)||ವಿ||

ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜABHC ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABEF ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ AB ಮೇಲೆ ಮತ್ತು AB , EF ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.

$\therefore$ (ABHC)||ವಿ|| = (ABEF)||ವಿ||

ಆದ್ದರಿಂದ (ΔABC)||ವಿ|| = $\frac{1}{2}$(ABEF)||ವಿ||

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ ನಾವು "ಒಂದೇ ಪಾದ , ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಇದ್ದರೆ, ತ್ರಿಭುಜ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆ " ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣಗಳು 12 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು 16 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು ?

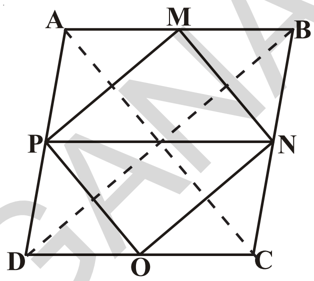
ಪರಿಹಾರ : ABCD ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಒಂದರ ಬಾಹುಗಳು AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು M, N, O ಮತ್ತು P ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಚಿತ್ರ MNOP. .

ಏರ್ಪಟ್ಟ MNOP ಯಾವ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ ? ಏಕೆ ?.

PN ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ PN || AB ಮತ್ತು PN || DC ಆಗುತ್ತವೆ (ಹೇಗೆ ?)

ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABNPಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ MNP ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ PN ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು PN ಮತ್ತು AB ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇವೆ.



$\therefore \quad \Delta MNP||\text{ವಿ}|| = \frac{1}{2} \; ABPN||\text{ವಿ}||$ .....(i)

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\Delta PON||\text{ವಿ}|| = \frac{1}{2} \; PNCD||\text{ವಿ}||$ .....(ii)

ಮತ್ತು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$

(1), (ii) ಮತ್ತು (iii) ರಿಂದ ನಮಗೆ

$(MNOP)||\text{ವಿ}|| = (\Delta MNP)||\text{ವಿ}|| + (\Delta PON)||\text{ವಿ}||$

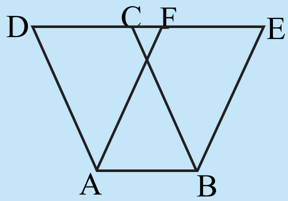
$= \frac{1}{2} \; (ABNP)||\text{ವಿ}|| + \frac{1}{2}(ABCD)||\text{ವಿ}||$

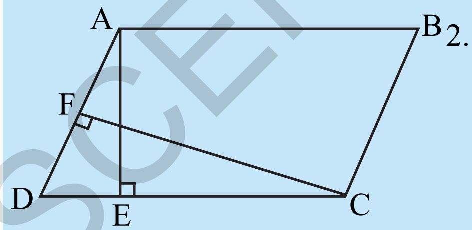
$= \frac{1}{2}$ (ವಜ್ರಾಕೃತಿ ABCD)||ವಿ||

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48$ ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.2

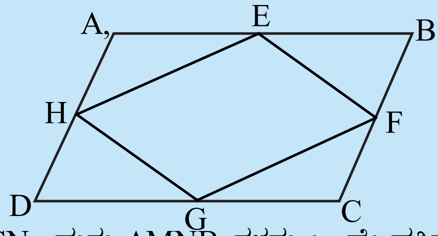
1. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 36 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. AB = 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ABEF ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



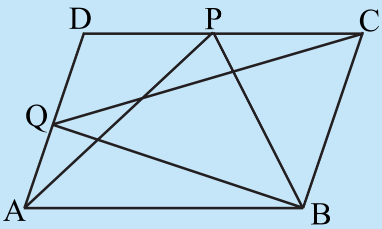


2. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. DC ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ರೇಖೆ AE ಮತ್ತು ADಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ರೇಖೆ CF , AB$\frac{1}{2}$(ABCD)||ವಿ||12 ಸೆಂ.ಮೀ, AE=8 ಸೆಂ.ಮೀ., ಮತ್ತುCF=12 ಸೆಂ.ಮೀ.ಆದರೆ AD ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

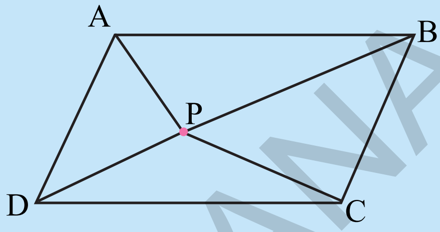
3. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ AB, BC, CD ಮತ್ತು AD ಬಾಹುಗಳು. ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E, F G ಮತ್ತು H ಗಳು ಆದರೆ $(EFGH)||\text{ವಿ}|| = \frac{1}{2}(ABCD)||\text{ವಿ}||$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



4. ಉದಾಹರಣೆ 3ರ ಆಧಾರವಾಗಿ ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN ಮತ್ತು ΔMNB ಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಹತ್ತಿರ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಚತುರ್ಭುಜ ಬರುತ್ತದೆ.



5. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳು DC ಮತ್ತು ADಗಳ ಮೇಲಿದ್ದರೆ (ΔAPB)||ವಿ||= Δ(BQC)||ವಿ||. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



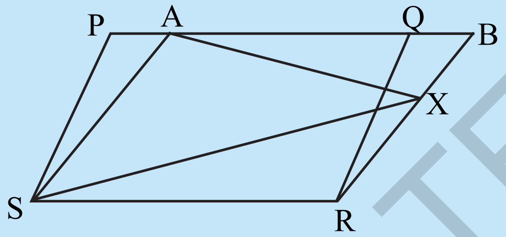
6. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ P ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

(i) $(\Delta APB)||ವಿ|| + (\Delta PCD)||ವಿ|| = \frac{1}{2}(ABCD)||ವಿ||$

(ii) $(\Delta APD)||ವಿ|| + (\Delta PBC)||ವಿ|| = (\Delta APB)||ವಿ|| + (\Delta PCD)||ವಿ||$

(ಸೂಚನೆ : P ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ AB ಯಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ)

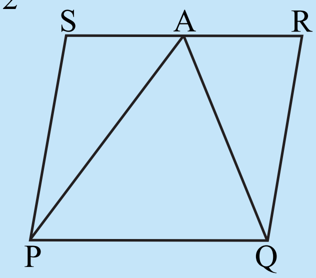
7. ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅದರ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯ ದೂರದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ದದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



8. PQRS ಮತ್ತು ABRS ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ. BR ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ X ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು.ಆದರೆ

(i) (PQRS)||ವಿ|| = (ABRS)||ವಿ||

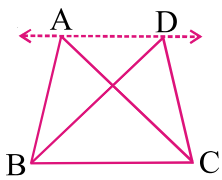
(ii) $(\Delta AXS)||ವಿ|| = \frac{1}{2}(PQRS)||ವಿ||$



9. ಒಬ್ಬ ರೈತನಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಲ ಇದೆ. RS ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು A ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆಗ ಹೊಲವು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ? ಈ ಭಾಗಗಳು ಯಾವ ಆಕಾರದಲ್ಲಿವೆ? ರೈತನು ತನ್ನ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಶೇಂಗಾ ಬೀಜಗಳನ್ನು ತೊಗರಿ ಮತ್ತು ಭತ್ತದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಿತ್ತಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ ಅವನು ಹೇಗೆ ಬಿತ್ತಬೇಕೆಂದು? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

10. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಅದರ ಕರ್ಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

11.6 ಒಂದೇ ಪಾದ ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು



ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೀವು ಇಷ್ಟುವರೆಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ABC ಮತ್ತು DBC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು AD ಮತ್ತು BC ಗಳ ಮಧ್ಯ ಇವೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

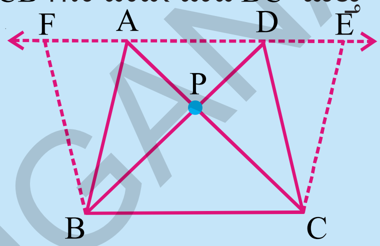
ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ ? ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಅನೇಕ ಜೊತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ನಾವು ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪಾದ ಅಥವಾ ಸಮ ಪಾದಗಳು, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವಂತೆ ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

ΔABC ಮತ್ತು ΔDBC ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು BC, FE ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. ADಯನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ. $CE \parallel AB$ ಮತ್ತು $BF \parallel CD$ ಇರುವಂತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು AECB ಮತ್ತು FDCB ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು BC ಮತ್ತು EF ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.



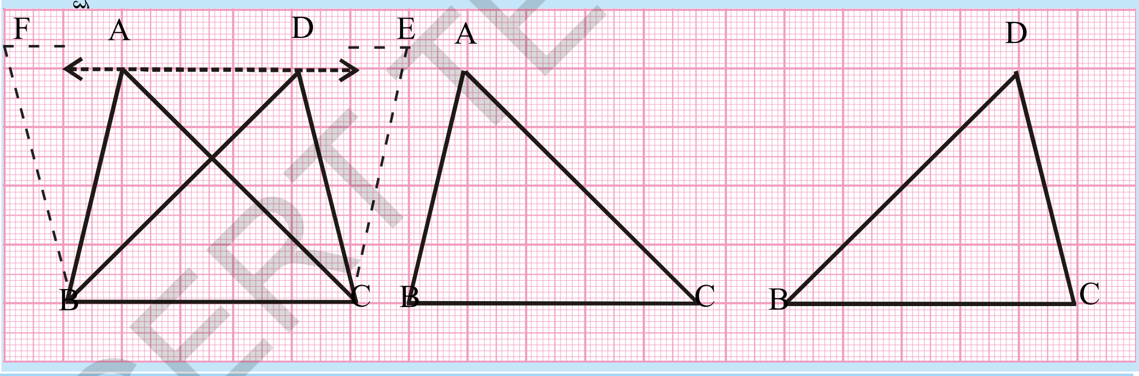
ಹೀಗಿದ್ದಾಗ (AECB)||ವಿ| = (FDCB)||ವಿ|. (ಹೇಗೆ ?)

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ (ΔABC)||ವಿ| $= \frac{1}{2}$ (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ AECB)||ವಿ| ...(i)

ಮತ್ತು $(\Delta DBC) = \frac{1}{2}$ (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ FDCB)||ವಿ| ಆಗುತ್ತದೆ.... (ii)

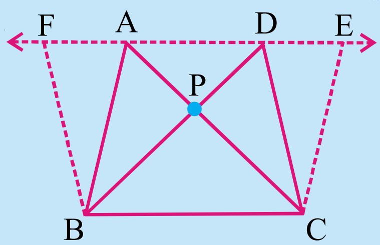
(i) ಮತ್ತು (ii), ರಿಂದ (ΔABC)||ವಿ| = (ΔDBC)||ವಿ| ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ನಾವು ΔABC ಮತ್ತು ΔDBC ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದಲ್ಲಿನ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸಹ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಹೇಗೆ ಸಮಾನವಾಗುತ್ತವೆಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.



ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ABC ಮತ್ತು DBC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವಂತೆ (ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋಸಿದಂತೆ) ಎಳೆಯಿರಿ. AC ಮತ್ತು BD ಗಳ ಛೇಧನ ಬಿಂದುವಿಗೆ P ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ. $CE \parallel BA$ ಮತ್ತು $BF \parallel CD$ ಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕೆಂದರೆ AD ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ E ಮತ್ತು F ಇರುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.



(ΔPAB)||ವಿ| = (ΔPDC)||ವಿ| ಎಂದು ನೀವು ತೋರಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಸೂಚನೆ : (ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳಾಗದೆ ಹೋದರೂ ಸಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ)

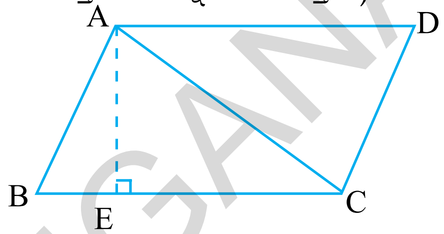
ಉಪಪ್ರಮೇಯ 1 : ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಪಾದ (ಅಥವಾ ಯಾವುದೇ ಬಾಹು) ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ (ಎತ್ತರ) ಗಳ ಗುಣಲಬ್ದದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ. AD || BC ಯನ್ನು CD =BA ಆಗುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ.

ಈಗ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು AC ಒಂದು ಕರ್ಣ

$\Delta ABC \cong \Delta ACD$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆಗ ΔABC||ವಿ|| = ΔACD||ವಿ|| (ಸರ್ವಸಮಾನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ)



ಆದ್ದರಿಂದ, ΔABC||ವಿ|| = $\frac{1}{2}$ (ABCD)||ವಿ||

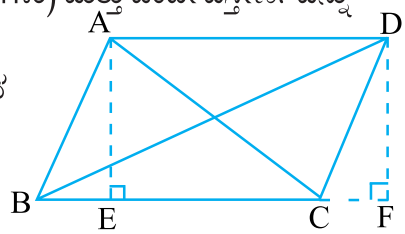
$AE \perp BC$ ಆಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಇದರಿಂದ (ABCD)||ವಿ|| = BC $\times$ AE ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆಗ (ΔABC)||ವಿ|| = $\frac{1}{2}$(ABCD)||ವಿ|| = $\frac{1}{2} \times BC \times AE$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ ΔABC ||ವಿ|| = $\frac{1}{2} \times$ ಪಾದ BC $\times$ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ AE ಆಗುತ್ತದೆ .

ಪ್ರಮೇಯ 11.2 : ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ (ಅಥವಾ ಸಮಾನ ಪಾದಗಳು) ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅವು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾವುವು? ΔABC ಮತ್ತು ΔDBC ಗಳ ಎತ್ತರಗಳೆಷ್ಟು?

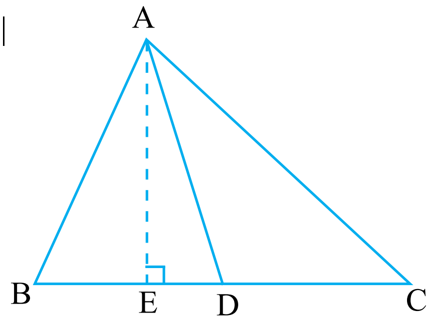
ಒಂದೇ ಪಾದ ಹೊಂದಿದ್ದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಅವುಗಳ ಎತ್ತರ ಗಳು ಹೇಗಿರುತ್ತವೆ? A,D ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಗಳೇನಾ?

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಅದರ ಮಧ್ಯರೇಖೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ .

ಪರಿಹಾರ : ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ.

ΔABD ಮತ್ತು ΔADC ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗ ಮತ್ತು ಇದರ ಪಾದಗಳು BD ಮತ್ತು DC ಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

$AE \perp BC$. ಆಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಈಗ (ΔABD) = $\frac{1}{2} \times$ ಪಾದ BD $\times$ ΔADB ನ ಎತ್ತರ) ||ವಿ||

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

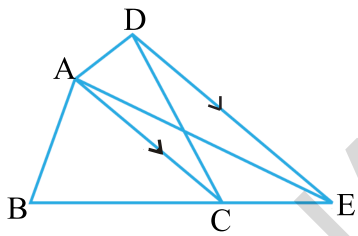
= $\frac{1}{2} \times$ ಪಾದDC $\times \Delta$ ACDಯ ಎತ್ತರ

= ΔACD||ವಿ||

ಆದ್ದರಿಂದ (ΔABD)||ವಿ|| = (ΔACD)||ವಿ|| ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5 : ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. AC ಒಂದು ಕರ್ಣ. DE || AC ಮತ್ತು BC ಅನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದರೆ ಅದು E ಹತ್ತಿರ ಖಂಡಿಸಿದೆ.

ಆದರೆ (ABCD)||ವಿ|| = (ΔABE)||ವಿ|| ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : (ABCD)||ವಿ|| = (ΔABC)||ವಿ|| + (ΔDAC)||ವಿ||

ΔDAC ಮತ್ತು ΔEAC ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಪಾದ $\overline{AC}$

ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರಗಳು DE || AC ಗಳ ಮಧ್ಯ ಇವೆ.

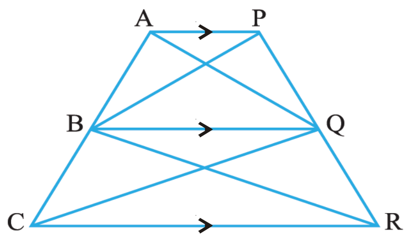
(ΔDAC)||ವಿ|| = (ΔEAC)||ವಿ|| (ಏಕೆ?)

ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಗೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ.

(ΔDAC)||ವಿ|| + (ΔABC)||ವಿ|| = (ΔEAC)||ವಿ|| + (ΔABC)||ವಿ||

(ABCD)||ವಿ|| = (ΔABE)||ವಿ||

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AP || BQ || CR, (ΔAQC)||ವಿ|| = (ΔPBR)||ವಿ|| ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : ΔABQ ಮತ್ತು Δ PBQ ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BQ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು AP || BQ ಗಳ ನಡುವೈ ಇವೆ.
ಆಗ (ΔABQ)||ವಿ|| = ΔPBQ)||ವಿ|| ...(1)

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ

(ΔCQB)||ವಿ|| = (ΔRQB)||ವಿ|| (ಒಂದೇ ಪಾದ BQ ಮತ್ತು BQ || CR) ...(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

(ΔABQ)||ವಿ|| + (ΔCQB)||ವಿ|| = (ΔPBQ)||ವಿ|| + (ΔRQB)||ವಿ||

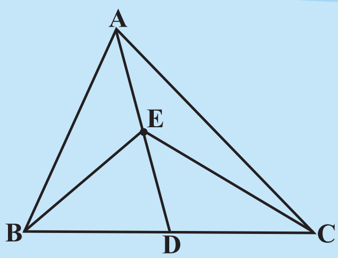
ಆದ್ದರಿಂದ ΔAQC ||ವಿ||= ವಿ ΔPBR||ವಿ||

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.3

1. ΔABC ಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ) ಮಧ್ಯರೇಖೆ AD ನಡುವಿನ ಬಿಂದು E ಆದರೆ.

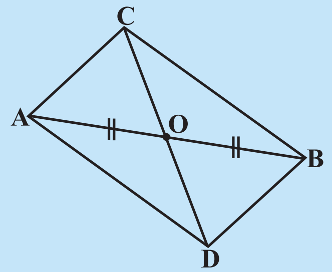
   (i) ΔABE||ವಿ|| = ΔACE||ವಿ||

   (ii) ΔABE||ವಿ|| = $\frac{1}{4}$(ΔABC)||ವಿ||

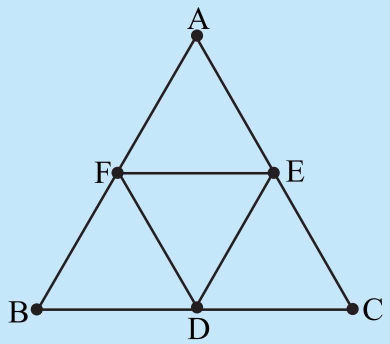


2. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣಗಳು, ಅದರ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

3. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔABD ಒಂದೇ ಪಾದ AB ಮೇಲೆ ಇವೆ. CD ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{AB}$ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು O ಹತ್ತಿರ ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ. (ΔABC)||ವಿ|| = (ΔABD)||ವಿ|| ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



4. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ΔABCಯಲ್ಲಿ D, E, F ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BC, CA ಮತ್ತು AB ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ , ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ .

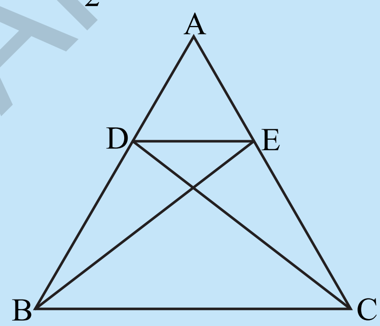


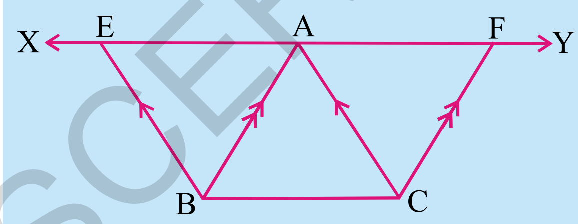
(i) BDEF ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

(ii) (ΔDEF)||ವಿ|| $= \frac{1}{4}(\Delta ABC)$||ವಿ||

(iii) (BDEF)||ವಿ|| $= \frac{1}{2}(\Delta ABC)$||ವಿ||

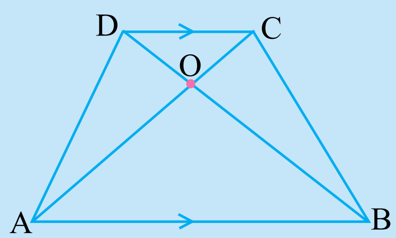
5. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ΔABCಯಲ್ಲಿ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB,AC ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು. ಮತ್ತು (ΔDBC)||ವಿ|| = (ΔEBC)||ವಿ|| ಆದರೆ DE || BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

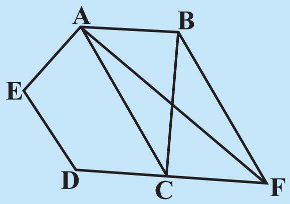




6. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ A ಯಿಂದ XY ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. BE || CA ಮತ್ತು CF || BA ಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅವು XY ಅನ್ನು E ಮತ್ತು F ಗಳ ಹತ್ತಿರ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ (ΔABE)||ವಿ|| = (ΔACF)||ವಿ|| ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ AB || DC ಕರ್ಣಗಳು AC ಮತ್ತು BD ಗಳು O ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.
(ΔAOD)||ವಿ|| = (ΔBOC)||ವಿ|| ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

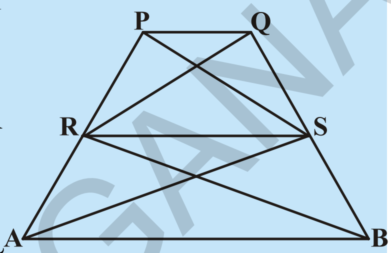




8. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCDE ಒಂದು ಪಂಚಭುಜಿ. B ಯಿಂದ AC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದ DC ಯನ್ನು F ಹತ್ತಿರ ಭೇಧಿಸಿದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

(i) (ΔACB) ||ವಿ|| = (ΔACF) ||ವಿ||

(ii) (AEDF)||ವಿ|| = (ABCDE) ||ವಿ||



9. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔRAS ||ವಿ|| = ΔRBS||ವಿ|| ಮತ್ತು [(ΔQRB)||ವಿ|| = (ΔPAS) ||ವಿ||] ಆದರೆ ಚತುರ್ಭುಜ PQSR ಮತ್ತು RSBA ಗಳೆರಡು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

10. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ ರಾಮಯ್ಯ ಎನ್ನುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಚತರ್ಭುಜಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳ ಇದೆ. ಆ ಗ್ರಾಮ ಪಂಚಾಯಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಠಶಾಲೆ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ರಾಮಯ್ಯನ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗ ಬೇಕಾಗಿಬಂದಿತು. ಆತನು ಸ್ಥಳವನ್ನು ಕೊಡುವುದಕ್ಕೆ ಅಂಗೀಕರಿಸುತ್ತಾ ಅದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಳವನ್ನು ಆತನ ಸ್ಥಳದ ಪಕ್ಕದಲ್ಲೇ ಕೊಡಬೇಕು. ಕೊಟ್ಟ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಳವನ್ನು ತನ್ನ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಸ್ಥಳ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಸ್ತಾಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಳವಡಿಸಬಹುದೋ ವಿವರಿಸಿರಿ (ಸ್ಥಳದ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ).

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ A ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ. BC, CA ಮತ್ತು AB ಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ BCED, ACFG ಮತ್ತು ABMN ಎನ್ನುವ ಚೌಕಗಳು ಎಳೆಯಲಾಗಿವೆ. ರೇಖಾಖಂಡ AX ⊥ DE , BC ಯನ್ನು Y ಹತ್ತಿರ, DE ಅನ್ನು X ಹತ್ತಿರ ಭೇಧಿಸಿವೆ. AD, AE ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿವೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ BF ,CM ಗಳು ಸೇರಿಸಲಾಗಿವೆ. (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(i) ΔMBC ≅ ΔABD

(ii) (BYXD) ||ವಿ|| = 2 (ΔMBC) ||ವಿ||

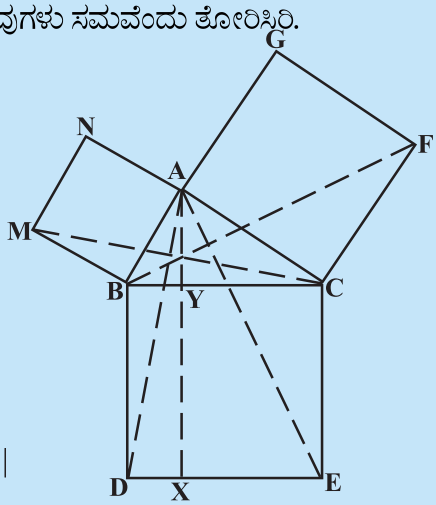
(iii) (BYXD)||ವಿ|| = (ABMN)||ವಿ||

(iv) ΔFCB ≅ ΔACE

(v) (CYXE) ||ವಿ|| = 2 (FCB) ||ವಿ||

(vi) (CYXE)||ವಿ||= (ACFG)||ವಿ||

(vii) (BCED) ||ವಿ|| = (ABMN)||ವಿ|| + (ACFG)||ವಿ||



ಫಲಿತಾಂಶ (vii)ನ್ನು ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಇದು ಪ್ರಖ್ಯಾತಿ ಹೊಂದಿದ ಪೈಥಾಗರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತ. ಇದರ ಸುಲಭತರವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀವು 10 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತೀರಿ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

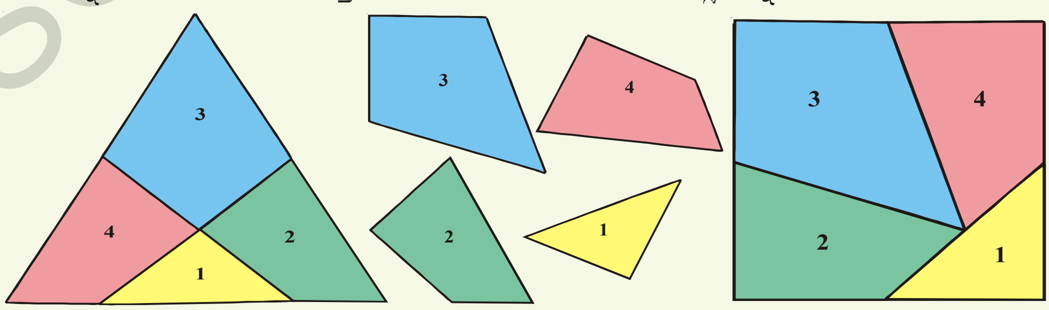
1. ಚಿತ್ರ ಒಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ . ಇದು ಆ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಒಳಗೊಂಡ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.
2. ಎರಡು ಸರ್ವಸಮಾನ ಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮ ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯವಲ್ಲ.
3. X ಎನ್ನುವ ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶ ಎರಡು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಏಕೀಭವಿಸದ ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶಗಳು P ಮತ್ತು Q ಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾದರೆ (X) ||ವಿ|| = (P) ||ವಿ|| + (Q) ||ವಿ|| ಆಗುತ್ತದೆ.
4. ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯ ಚಿತ್ರಗಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು (ಪಾದ) ಮತ್ತು ಬಾಹುವಿಗೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಶೀರ್ಷಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ.
5. ಒಂದೇ ಪಾದ (ಅಥವಾ ಸಮಾನ ಪಾದಗಳು), ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ.
6. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅದರ ಪಾದ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ(ಎತ್ತರ)ಗಳ ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನ.
7. ಒಂದೇ ಪಾದ (ಅಥವಾ ಸಮಾನ ಪಾದಗಳು) ಮತ್ತು ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಇರುವ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ.
8. ಒಂದೇ ಪಾದ ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ, ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆ.
9. ಒಂದೇ ಪಾದ (ಅಥವಾ ಸಮಾನ ಪಾದಗಳು) ಒಂದೇ ಸಮತಲ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ.
10. ಒಂದೇ ಪಾದ (ಅಥವಾ ಸಮಾನ ಪಾದಗಳು) ಹೊಂದಿದ್ದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ , ಅವು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ.

ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ?

ಒಂದು ಪಜಿಲ್ (ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು)

ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಡೇವಿಡ್ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್ (1862-1943)ಮೊದಲನೇ ಸಲ ಒಂದು ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಬಹುಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ ಮೊದಲ ಬಹುಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಎಂದು ಋಜು ಮಾಡಿದನು.

ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಪಜಲಿಸ್ಟ್ ಹೆನ್ರೀ ಏರ್ನಸ್ಟ್ ಡುಡಿನ್ನೀ (1847 - 1930) ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು 4 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಮತ್ತೇ ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿವ ಫಜಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದನು.



ನೀವು ಸಹ ಈ ಆಲೋಚನೆ ಆಧಾರವಾಗಿ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಫಜಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಆನಂದಿಸಿರಿ.

12 ವೃತ್ತಗಳು

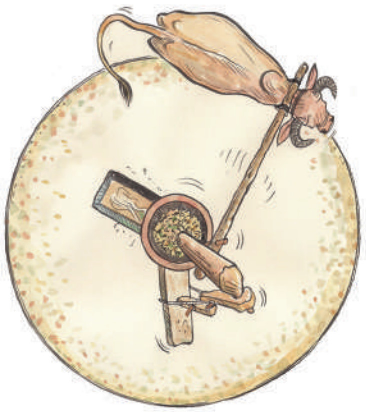
12.1 ಪರಿಚಯ (ಪೀಠಿಕೆ)

ನಾವು ನಮ್ಮ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳು, ನಾಣ್ಯಗಳು, ಬಳೆಗಳು, ಗಡಿಯಾರಗಳು, ಚಕ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂಗಿ ಗುಂಡಿಗಳು ಮುಂತಾದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಲೆ ಇರುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ವಸ್ತುಗಳು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿವೆ.

ನಿಮ್ಮ ಬಾಲ್ಯದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ನಾಣ್ಯ , ಬಳೆ ಮತ್ತು ಗುಂಡಿಯಂತಹ ವಸ್ತುಗಳ ಸುತ್ತಲೂ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನಿಂದ ಎಳೆದಿರುತ್ತೀರಿ.

ನೀವು ಎಳೆದ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ವೃತ್ತಾಕಾರ ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ.

ನಾವು ಮೇಲೆ ಗಮನಿಸಿದ ವೃತ್ತಾಕಾರ ವಸ್ತುಗಳೆಲ್ಲ ದಪ್ಪವಾಗಿದ್ದು, ತ್ರಿಮಿತಿ ಆಕಾರದಲ್ಲಿವೆ. ಆದರೆ ನಾವು ಎಳೆದ ವೃತ್ತಗಳೆಲ್ಲ ದಪ್ಪವಾಗಿಲ್ಲದೇ ದ್ವಿಮಿತಿ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿವೆ.

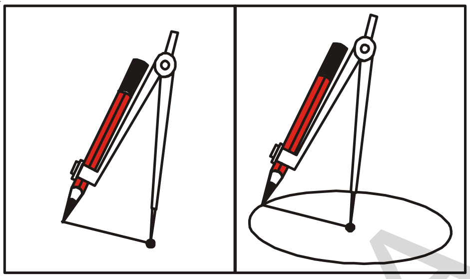


ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ . ನೀವು ಎಣ್ಣೆ ತಯಾರಿಸುವ ಗಾಣವನ್ನು ನೋಡಿಯೇ ಇರುತ್ತೀರಿ. ಗಾಣಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದ ಎತ್ತು ತಿರುಗುತ್ತಿರುವ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲಿರಾ. ಇದು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಎತ್ತು ತಿರುಗುತ್ತಿರುವ ಮಾರ್ಗದೊಳಗೆ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದರೆ ಆದು ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಗಾಣಕ್ಕೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಕಟ್ಟಿಡಲಾಗಿದೆ. ಕೋಲಿನ ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆಯನ್ನು ಎತ್ತು ಎಳೆಯುತ್ತಾ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವನ್ನೇ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಕೋಲಿನ ಉದ್ದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲಿರೇನೋ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

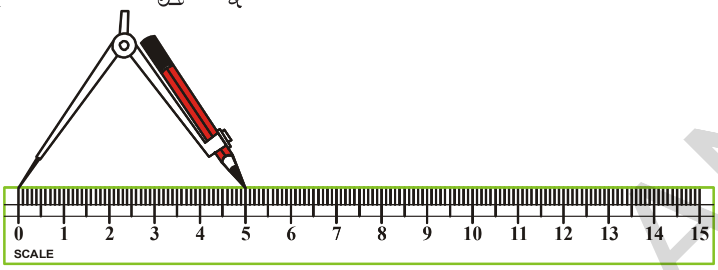
ಈ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ನಾವು ವೃತ್ತಗಳು , ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗುಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕೈವಾರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಹೇಗೆ ಎಳೆಯಬೇಕೆನ್ನುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

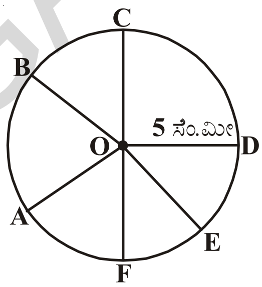


ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ್ನು ಕೈವಾರದಲ್ಲಿ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಇಡುವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಟ್ಟು ಸ್ಕ್ರೂಅನ್ನು ಗಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಬಿಗಿಯಿರಿ. ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ 'O' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಕೈವಾರದಲ್ಲಿ ಚೂಪಾಗಿದ್ದ ಕೊನೆಯನ್ನು 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲಿಡಿರಿ. 'O' ಬಿಂದು ಮೇಲೆ ಕೈವಾರವನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ್ನು ವೃತ್ತಾಕಾರವಾಗಿ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯುತ್ತಾ ವೃತ್ತವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ನಮಗೆ ಅಳತೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆ.

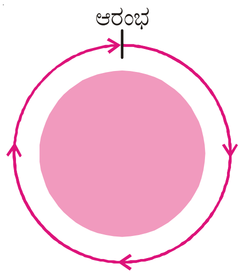
ಕೈವಾರದ ಒಂದು ಕೊನೆ, ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಕೊನೆಗಳ ಮಧ್ಯದ ದೂರ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ ಕೈವಾರವನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು 'O' ನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂ.ಮೀ) ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.





ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ OA, OB, OC, OD, OE ಮತ್ತು OF ಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿದರೆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವುಗಳ ದೂರಗಳನ್ನು 'O'ನಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದರೆ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಾ? "ವೃತ್ತ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮೂಹ"ವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೀರಿ.

ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು 'O' ನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಎಂದು 'OA' (OB ಅಥವಾ OC ಅಥವಾ) ಸ್ಥಿರ ದೂರವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯ ಎನ್ನುವರು.



ನರಸಿಂಹ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ನಡೆಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಒಂದು ಸುತ್ತನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿದನು. ನರಸಿಂಹ ನಡೆದ ದೂರವನ್ನು ನೀವು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುವಿರಿ? ಇದು ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕು ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಸರಿಹದ್ದಿನ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ ಇದನ್ನು ಪಾರ್ಕೊಂದರ 'ಸುತ್ತಳತೆ 'ಎನ್ನುವರು.

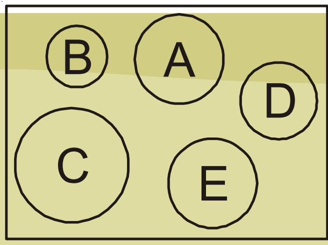
ಆಗ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದವನ್ನು ವೃತ್ತದ 'ಪರಧಿ' ಎನ್ನುವರು.

ಚಟುವಟಿಕೆ

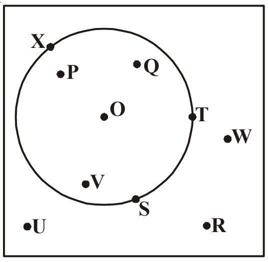
ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದೇ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಕೃತ್ಯದಿಂದ ಎಳೆದ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೀರಿ?

ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು '**ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು**' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :



1. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ವೃತ್ತ A ಗೆ ಸರ್ವಸಮಾನವಾಗಿ ಇರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ
2. ವೃತ್ತಗಳ ಯಾವ ಅಳತೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ.



ಒಂದು ವೃತ್ತ ಅದು ಇರುವ ಸಮತಲವನ್ನು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. (i)ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಭಾಗ ಇದನ್ನೇ ವೃತ್ತದ ಅಂತರ ಎಂದು ಕೂಡ ಎನ್ನುವರು. (ii) ವೃತ್ತದ ಸೀಮಾ ರೇಖೆ. ಇದನ್ನು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಎಂದು ಕೂಡ ಎನ್ನುವರು. (iii) ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಭಾಗ ಅಥವಾ ವೃತ್ತದ ಬಾಹ್ಯ ಇದನ್ನು ವೃತ್ತದ ಬಾಹ್ಯ ಎನ್ನುವರು. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ ವೃತ್ತದ ಅಂತರ, ವೃತ್ತದ ಬಾಹ್ಯ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಅಂತರ ಭಾಗ ಸೇರಿ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪ್ರಾಂತವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

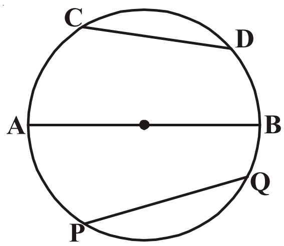
ಒಂದು ತೆಳ್ಳಗಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕಾಗದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು. ಅದನ್ನು ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಮಡಚಿ, ಮತ್ತೆ ತೆರೆಯಿರಿ. ಮತ್ತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಮಡಚಿ ಮತ್ತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಅನೇಕ ಸಲ ಮಾಡಿರಿ. ಕೊನೆಗೆ ತೆಗೆದು ನೋಡಿದರೆ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ?

ಕಾಗದದ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಮಡಚಿದ ಭಾಗಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ಈ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಏನೆನ್ನುವರೋ ಜ್ಞಪ್ತಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು ವೃತ್ತ ಒಂದರ ಕೇಂದ್ರ.

ವಿಭಾಜಕ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರತಿ ಮಡಚಿದ ಭಾಗದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ? ಈ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲ ಸಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಮಡಚಿದ ಭಾಗ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಅರ್ಧಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 'ವ್ಯಾಸ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟು.

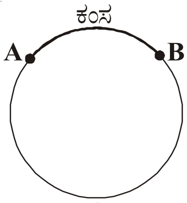
ಮೇಲಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕಾಗದವನ್ನು ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಅಲ್ಲದೇ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಮಡಚಿದರೂ ಏರ್ಪಡುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಆ ವೃತ್ತದ 'ಜ್ಯಾ' ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 'ಜ್ಯಾ' ಎನ್ನುವರು.



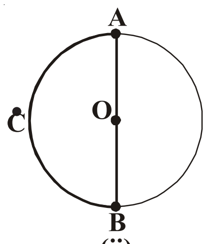
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ CD, AB ಮತ್ತು PQ ಗಳು ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಜ್ಯಾವನ್ನು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು. ಅವು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗವೇ ವೃತ್ತದ ಕಂಸ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ (i) ನಲ್ಲಿ AB ಅನ್ನು ಕಂಸ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

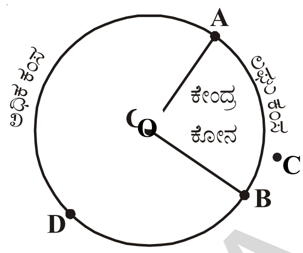


(i)

ಕಂಸವನ್ನು $\overparen{AB}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕಂಸದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳು, ವ್ಯಾಸದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ ಆಂತಹ ಕಂಸವನ್ನು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ ಕಂಸ ಅಥವಾ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ (iii) ರಲ್ಲಿ $\overparen{ACB}$ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ.



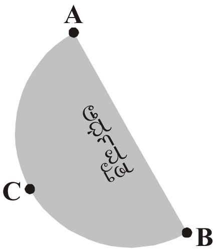
(ii)

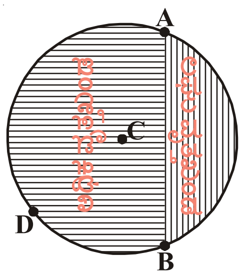


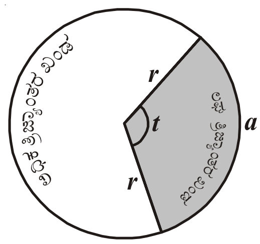
(iii)

ಒಂದು ಕಂಸದ ಉದ್ದ ಅರ್ಧವೃತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದರೆ ಆ ಕಂಸವನ್ನು ಲಘು ಕಂಸ ಎಂದು, ಕಂಸದ ಉದ್ದ ಅರ್ಧವೃತ್ತಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಕಂಸವನ್ನು ಅಧಿಕಕಂಸ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ (iii) $\overset{\frown}{ACB}$ ಲಘು ಕಂಸ ಮತ್ತು $\overset{\frown}{ADB}$ ಅಧಿಕ ಕಂಸ.

ಕಂಸದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಜ್ಯಾದಿಂದ ಸೇರಿಸಿದರೆ. ಆ ಜ್ಯಾ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಲಘುಕಂಸ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ಮಧ್ಯ ಇರುವ ಭಾಗವನ್ನು ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡವೆಂದು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗೆ, ಅಧಿಕ ಕಂಸ ಮಧ್ಯ ಇರುವ ಭಾಗವನ್ನು ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಜ್ಯಾ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವಾದರೆ, ಆಗ ವ್ಯಾಸ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.



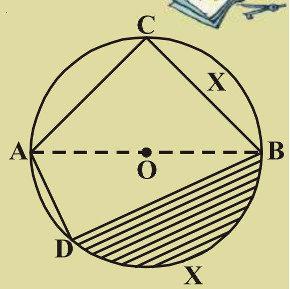




ಒಂದು ಕಂಸ ಮತ್ತು ಅದರ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು 'ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ' ಅಥವಾ 'ಸೆಕ್ಟಾರ್' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಲಘುತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ, ಆದರೆ ಉಳಿದಿದ್ದು ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರಖಂಡ (ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

ಅಭ್ಯಾಸ -12.1

1. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಆದರೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಭಾಗಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.



(i) $\overline{AO}$ (ii) $\overline{AB}$ (iii) $\overset{\frown}{BC}$

(iv) $\overline{AC}$ (v) $\overset{\frown}{DCB}$ (vi) $\overset{\frown}{ACB}$

(vii) $\overline{AD}$ (viii) ಗೆರೆಗಳು ಎಳೆದ ಪ್ರದೇಶ.

2. ಸತ್ಯವೋ, ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

i. ವೃತ್ತ ಅದು ಇರುವ ಸಮತಲವನ್ನು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ. ( )

ii. ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಲಘು ಕಂಸಗಳ ನಡುವೆ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರದೇಶವೇ ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡ ( )

iii. ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಕಂಸಗಳ ನಡುವೆ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರದೇಶವೇ ಅಧಿಕವೃತ್ತಖಂಡ ( )

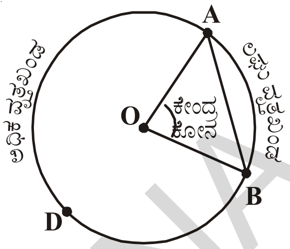
iv. ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಅಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ( )

v. ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜ್ಯಾದಿಂದ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರದೇಶವೇ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ( )

vi. ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾವನ್ನು ವ್ಯಾಸ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ( )

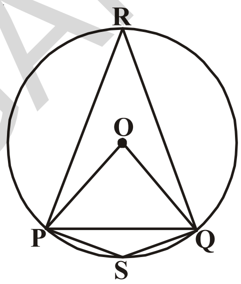
vii. ಯಾವ ವ್ಯಾಸದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾದರೂ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವಾಗುತ್ತದೆ. ( )

12.2 ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ :



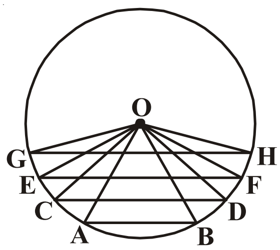
'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ 'O' ನ್ನು A , B ಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಕೇಂದ್ರ ಹತ್ತಿರ ಕೋನ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. $\angle AOB$ಯನ್ನು ಜ್ಯಾ $\overline{AB}$ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು $\angle POQ$, $\angle PSQ$ ಮತ್ತು $\angle PRQ$ ಗಳನ್ನು ನೀವು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೀರಿ?



i. ಕೇಂದ್ರ 'O' ಹತ್ತಿರ ಜ್ಯಾ PQ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ $\angle POQ$.

ii. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಜ್ಯಾ PQ ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು S ಮತ್ತು R ಗಳಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle PSQ$ ಮತ್ತು $\angle PRQ$.



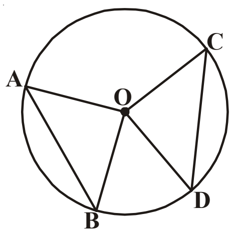
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ 'O' ಮತ್ತು AB, CD, EF ಮತ್ತು GH ಗಳು ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು.

ಚಿತ್ರದಿಂದ $GH > EF > CD > AB$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಆದರೆ ಈ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದ ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?

ಕೋನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಜ್ಯಾ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆಲ್ಲಾ ಕೇಂದ್ರದ ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವು ಕೇಂದ್ರದ ಹತ್ತಿರ ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಹೇಗಿರುತ್ತವೋ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ.



'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲೆ ಕೈವಾರ ಮತ್ತು ಸ್ಕೇಲು ಸಹಾಯದಿಂದ ಎರಡು ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳು AB ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಕೇಂದ್ರ 'O' ಅನ್ನು A, B, C ಮತ್ತು D ಗಳಿಂದ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಈಗ $\angle AOB$ ಮತ್ತು $\angle COD$ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವು ಒಂದಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸಮಾನವೇನಾ ?

ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಹತ್ತಿರ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ. ಆ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ.

ಈ ಸತ್ಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

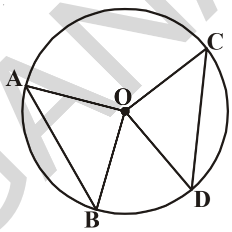
ಪ್ರಮೇಯ 12.1 : ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಅವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ.

ದತ್ತ : 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{CD}$ ಗಳು ಎರಡು ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳು. ಅವು ಕೇಂದ್ರದೊಡನೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು $\angle AOB$ ಮತ್ತು $\angle COD$

ಸಾಧನೀಯ : $\angle AOB = \angle COD$

ರಚನೆ : ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಜ್ಯಾಗಳ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಆಗ ΔAOB ಮತ್ತು ΔCOD ಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : AOB ಮತ್ತು CODಗಳಲ್ಲಿ



$AB = CD$ (ದತ್ತ)

$OA = OC$ (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

$OB = OD$ (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಸಿದ್ಧಾಂತ)

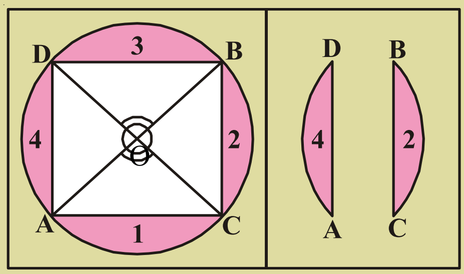
ಆದ್ದರಿಂದ' $\angle AOB \cong \angle COD$ (ಸರ್ವ ಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಗಮನಿಸಿ : ಸರ್ವ ಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ 'C.P.C.T. (Correspanding Parts of Congruent Triangle) (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಜ್ಯಾಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ? ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ಅನ್ವೇಷಿಸೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ . ವೃತ್ತದ ಅಂಚುಗಳು ಏಕೀಭವಿಸುವಂತೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಮಡಚಿರಿ. ಮಡಚಿದ ಭಾಗವನ್ನು ತೆರೆದು ಇನ್ನೊಂದು ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಮಡಚಿರಿ. ಮಡಚಿದ ಭಾಗವನ್ನು ತೆರೆದು ನೋಡಿದರೆ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳು ಕೇಂದ್ರ 'O' ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಜೊತೆ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಇವು ಸಮ. ವ್ಯಾಸದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳು A, B, C ಮತ್ತು D ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.



ಜ್ಯಾಗಳು $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ ಮತ್ತು $\overline{AD}$ ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಖಂಡಗಳು 1, 2, 3 ಮತ್ತು 4 ಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ.

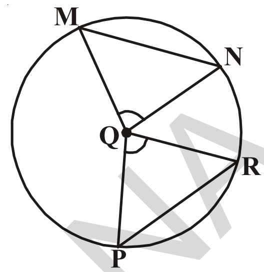
ಈ ಖಂಡಗಳನ್ನು ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಜೋಡಿಸಿದರೆ (1,3) ಮತ್ತು (2,4) ಜೊತೆಗಳ ಅಂಚುಗಳು

ಏಕೀಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಎಂದರೆ $\overline{AD} = \overline{BC}$ ಮತ್ತು $\overline{AC} = \overline{BD}$ ಆಗುತ್ತವೆಯಾ?

ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರು. ಇದೇ ವಿಷಯವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಗಳ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸರಿನೋಡಿದರೆ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮಾನವಾಗುತ್ತವೆಂದು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಸಾದಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 12.1 ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನೀವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಪ್ರಮೇಯ 12.2 : ಒಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮ.



ಇದು ಇದಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆ ಹೇಳಲಾದ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ.

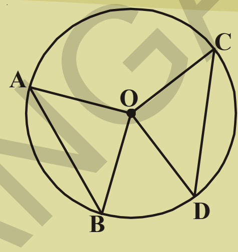
12.1 $\angle PQR \cong \angle MQN$ ಎಂದು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಿಂದ

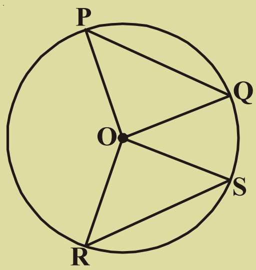
$\Delta PQR \cong \Delta MQN$ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು (ಏಕೆ ?)

$PR = MN$? ಇದು ಸರಿಯೇನಾ ? (ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ)

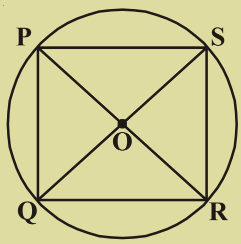
ಅಭ್ಯಾಸ - 12.2

1. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $AB = CD$ ಮತ್ತು $\angle AOB = 90$ ಆದರೆ $\angle COD$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.





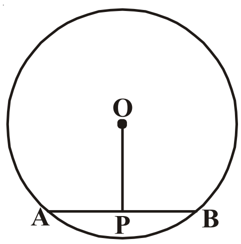
2. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $PQ = RS$ ಮತ್ತು $\angle ORS = 48^0$ ಆದರೆ $\angle OPQ$ ಮತ್ತು $\angle ROS$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



3. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PR ಮತ್ತು QS ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳಾದರೆ $PQ = RS$ ಆಗುತ್ತದೆಯಾ?

12.3 ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ :

- 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಜ್ಯಾ $\overline{AB}$ ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರ 'O' ನಿಂದ ಜ್ಯಾ $\overline{AB}$ ಗೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
- ಲಂಬ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ $\overline{AB}$ ಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು P ಆಗಿರಲಿ.
- PA ಮತ್ತು PB ಗಳನ್ನು ಅಳತೆಮಾಡಿದ ನಂತರ $PA = PB$ ಆಗುವುದೇನೋ ನೋಡಿರಿ.



ಪ್ರಮೇಯ 12.3 : ಒಂದು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜ್ಯಾಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು, ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

O ನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀವೇ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ಮತ್ತು $\Delta OPA \cong \Delta OPB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

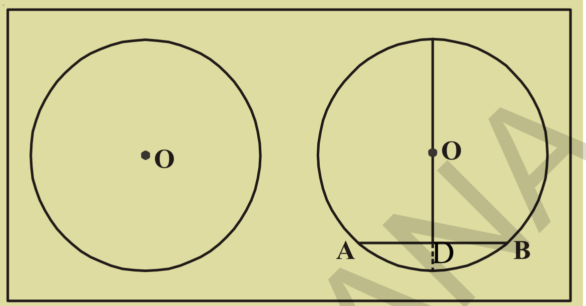
ಈ 12.3 ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೇನು ?

"ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆ ಜ್ಯಾಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ ".

ಚಟುವಟಿಕೆ

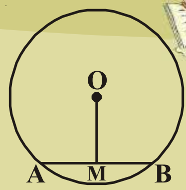
ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು 'O' ಆಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

ವೃತ್ತದ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗವನ್ನು ಮಡಚಿ ಮತ್ತೆ ತೆರೆಯಿರಿ. ಏರ್ಪಟ್ಟ ಭಾಗವನ್ನು ಜ್ಯಾ AB ಅನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇನ್ನೊಂದು ಮಡತೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಹೋಗುವಂತೆ ಮತ್ತು A, B ಮೇಲೆ ಏಕೀಭವಿಸುವಂತೆ ಮಡಚಿರಿ. ಎರಡು ಛೇದಿಸುವ ಭಾಗವನ್ನು D ಆಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. AD = DB ಆಗಿದೆಯಾ? $\angle ODA = \angle ODB =$ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಮಡತೆಗಳ ಮಧ್ಯ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅವು ಲಂಬಕೋನಗಳು. ಅದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾ ಅನ್ನು ಅಧಿರ್ಸುವ ರೇಖೆ ಜ್ಯಾಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಮಾಡಬಹುದು.



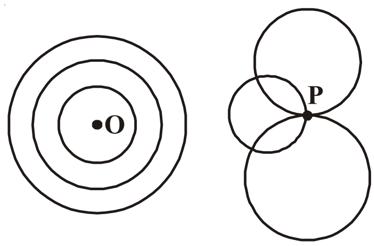
ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

'O' ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಒಂದು ಮತ್ತು 'M' ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. ಆದರೆ $\overline{OM}$, AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.
(ಸೂಚನೆ : OA,OB ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ Δ OAM ಮತ್ತು Δ OBM ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ.)



12.3.1 ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು

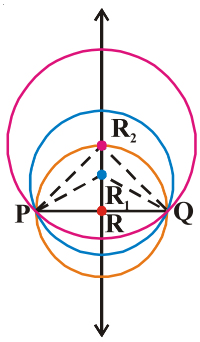
'O' ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು. 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ನಾವು ಎಳೆಯಬಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳೆಷ್ಟು? ನಾವು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟನ್ನಾದರೂ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಈ ವೃತ್ತಗಳೆನ್ನೆಲ್ಲಾ ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯ್ರ ವೃತ್ತಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. 'P' ಬಿಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಆಗದೇ ಹೋದರೂ ನಾವು P ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಅನೇಕ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.



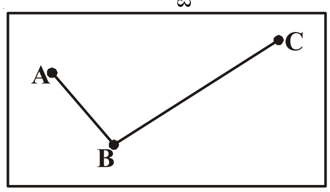
P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಹೋಗುವಂತೆ ಎಳೆಯಬಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳೆಷ್ಟು? P ಮತ್ತು Q ಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವಂತೆ ಬಹಳ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

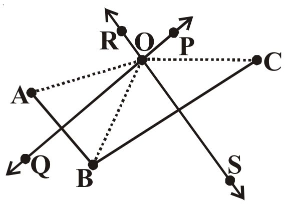
P ಮತ್ತು Q ಎರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿ PQ ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು R, R_1 ಮತ್ತು R_2 ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. R, R_1 ಮತ್ತು R_2 ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ RP, R_1P ಮತ್ತು R_2P ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಈ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು Q ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತಿವೆಯೇ ? (ಏಕೆ)



ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವದು. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು ಜ್ಯಾದ ಲಂಬದ ಮೇಲಿರುವದು. ಮೂರು ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅವುಗಳಿಂದ ಎಳೆಯಬಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳೆಷ್ಟು? ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು A,B ಮತ್ತು C ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. AB ಮತ್ತು BC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

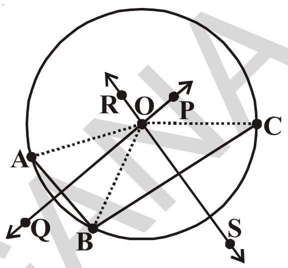


$\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{BC}$ ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{RS}$ ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು 'O' ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. (ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ) ಈಗ 'O' ಬಿಂದು $\overline{AB}$ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.



ಆದ್ದರಿಂದ OA = OB. .....(i)

$\overleftrightarrow{PQ}$ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಬಿಂದು A , B ಗಳಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ ಹಾಗೆಯೇ 'O' ಬಿಂದು $\overline{BC}$ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಕೂಡ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ OB = OC ..... (ii)



(i) ಮತ್ತು (ii) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ

OA = OB = OC ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು (ಸಂಕ್ರಮಣ ಧರ್ಮ)

ಆದ್ದರಿಂದ A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು 'O'. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಎಳೆದ ವೃತ್ತ B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಕೂಡ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A, B ಮತ್ತು C ಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಹೋಗುವ ವೃತ್ತ ಒಂದೇ ಒಂದು ಇರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ ಮೂರು ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಹೋಗುವ ಏಕೈಕ ವೃತ್ತ ಇರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

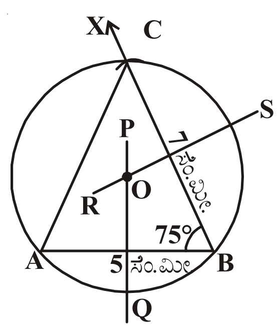
ಸೂಚನೆ : AC ಅನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ΔABC ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ವೃತ್ತವನ್ನು ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು 'O' ಅನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. OA ಅಥವಾ OB ಅಥವಾ OC ಗಳು ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವಂತೆ ಎಳೆಯ ಬಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳೆಷ್ಟು? ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವಂತೆ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ, $\angle B = 75^0$ ಮತ್ತು BC =7 ಸೆಂ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ΔABCಗೆ ಪರಿವೃತ್ತ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ, ಉದ್ದ ಇರುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\angle B = 75^0$ ಇರುವಂತೆ B ಹತ್ತಿರ ಕೋನ ಕಿರಣ BXನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 7 ಸೆಂ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು BX ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಕಂಸ BX ಅನ್ನು C ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. C ಮತ್ತು Aಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ΔABC ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{BC}$ ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು $\overleftrightarrow{PQ}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{RS}$ ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\overleftrightarrow{PQ}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{RS}$ ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು 'O'. ಈಗ 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆ ವೃತ್ತ B ಮತ್ತು C ಮೂಲಕ ಕೂಡ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಬೇಕಾದ ಪರಿವೃತ್ತ.

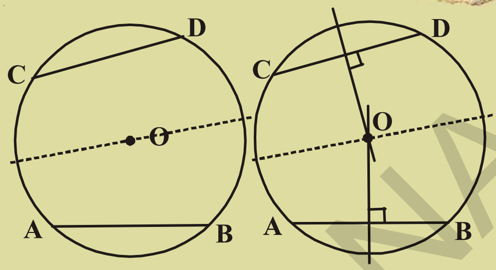


12.3.2 ಜ್ಯಾಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ

ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಇರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಅಪರಿಮಿತ. ನಾವು ವೃತ್ತದಿಂದ ಒಂದೇ ಉದ್ದ ಇರುವ ಅನೇಕ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅವು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳ ದೂರ ಹೇಗೆ ಇರುತ್ತದೆ? ಈ ಚಟುವಟಿಕೆದಿಂದ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದು ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ, ಕೇಂದ್ರವನ್ನು 'O' ಆಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಮಡಚಿರಿ. ಈಗ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ ಕಂಸ ಅಂಚು ಹತ್ತಿರ. ಸ್ವಲ್ಪ ಮಡಚಿಸಿ ತೆರೆಯಿರಿ. ನಿಮಗೆ ಎರೆಡು ಸರ್ವಸಮ ಜ್ಯಾಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಅವನ್ನು $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{CD}$ ಮತ್ತು CDಗಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ಜ್ಯಾ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಮಡಚಿರಿ. ವಿಭಾಜಕ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ 'O' ನಿಂದ ಜ್ಯಾ ಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

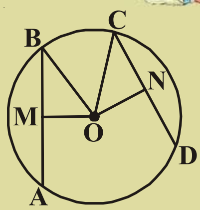


ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ವೃತ್ತ ಮಡತೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತಾ ಅನೇಕ ಸಲ ಮಾಡಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.

"ಸರ್ವಸಮ ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ".

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

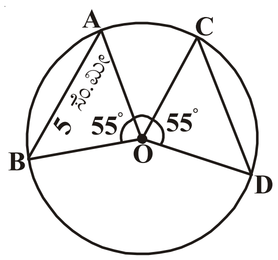
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು AB = CD. OMಮತ್ತು ON ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{CD}$ ಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳಾದರೆ OM = ON ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು "ಸಮನಾದ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ" ಎನ್ನುವ ಪ್ರಮೇಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವಾದರೆ CD ಉದ್ದವನ್ನು AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ ಆದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : Δ AOB ಮತ್ತು Δ COD ಗಳಲ್ಲಿ



OA = OC (ಏಕೆ?)

OB = OD (ಏಕೆ?)

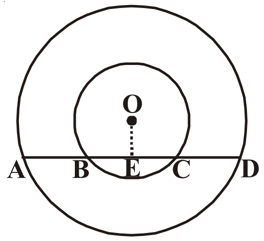
$\angle AOB = \angle COD$

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\because$ AB = CD (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮಾನ ಭಾಗಗಳು)

$\therefore$ AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ.. ಆದ್ದರಿಂದ CD = 5 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಎರಡು ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಾಗಿವೆ. ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ AD ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತವನ್ನು B ಮತ್ತು C ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ AB = CD ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ದತ್ತ : 'O'ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ $\overline{AD}$ ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತವನ್ನು B ಮತ್ತು C ಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ : AB = CD

ರಚನೆ : $\overline{AD}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ $\overline{OE}$ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ $\overline{AD}$ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು $\overline{OE}$, $\overline{AD}$ ಗೆ ಲಂಬ.

$\because$ $\overline{AD}$ ಯನ್ನು $\overline{OE}$ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. (ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.)

$\therefore$ AE = ED ..... (i)

'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಇರುವ ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ $\overline{BC}$ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು $\overline{AD}$ ಗೆ $\overline{OE}$ ಲಂಬ.

$\overline{BC}$ ಅನ್ನು $\overline{OE}$ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ (ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ)

$\therefore$ BE = CE ..... (ii)

ಸಮೀಕರಣ (ii) ನ್ನೂ (i) ರಿಂದ ಕಳೆದರೆ.

AE - BE = ED - EC

AB = CD

ಅಭ್ಯಾಸ - 12.3

1. ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಪರಿವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

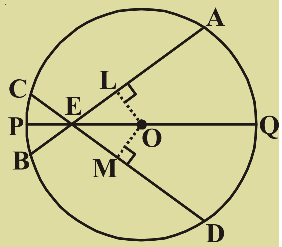
   (i) Δ ABC ಅಲ್ಲಿ AB = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. BC = 7 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು $\angle A = 60^o$

   (ii) Δ PQR ಅಲ್ಲಿ PQ = 5 ಸೆಂ.ಮೀ. QR = 6 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು RP = 8.2 ಸೆಂ.ಮೀ.

   (iii) Δ XYZ ಅಲ್ಲಿ XY = 4.8 ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle X = 60^o$ ಮತ್ತು $\angle Y = 70^o$

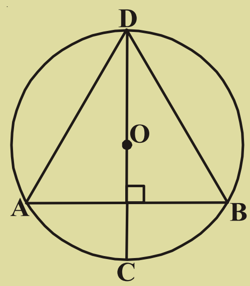
2. AB = 5.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಳೆದು, A, B ಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

3. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಎರಡು ಬೇರೆಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾನ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

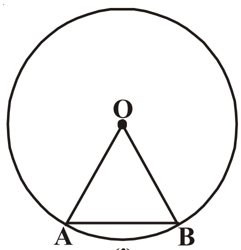


4. ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. (ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ.)

5. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB ಒಂದು ಜ್ಯಾ CD ವ್ಯಾಸ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. AD = BD ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

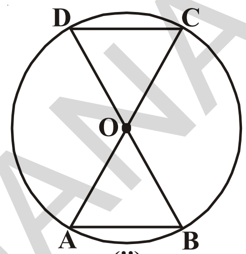


12.4 ವೃತ್ತ ಕಂಸದಿಂದ ಕೇಂದ್ರದೊಡನೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ :


(i)

ಚಿತ್ರ (i) ನಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು $\overset{\frown}{AB}$ ಒಂದು ಕಂಸ (ಲಘು ಕಂಸ) ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಕಂಸ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳು ಇವೆ.

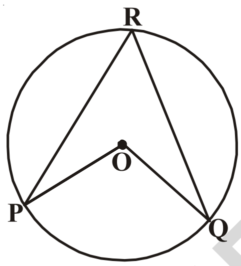
ಆದ್ದರಿಂದ ಜ್ಯಾ ಕೇಂದ್ರ 'O' ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ, ಕಂಸರೇಖೆ ಕೇಂದ್ರ 'O' ನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಚಿತ್ರ (ii) ನಲ್ಲಿ 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{CD}$ ಗಳು ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು. AB = CD ಆದರೆ ಆಗ $\angle AOB = \angle COD$.


(ii)

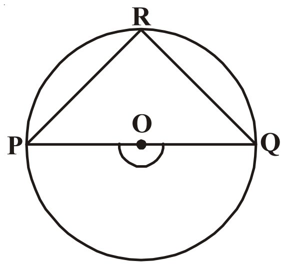
ಇದರಿಂದ ಕಂಸ ರೇಖೆ $\overset{\frown}{AB}$ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ, ಕಂಸರೇಖೆ $\overset{\frown}{CD}$ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. (ಅಂದರೆ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು)

ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ವೃತ್ತಗಳು ಅಥವಾ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಕಂಸಗಳು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವೆಂದು ನಾವು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

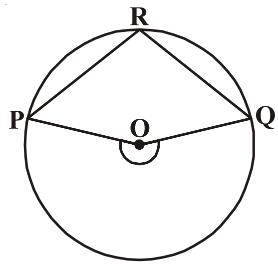
12.4.1 ಒಂದು ಕಂಸ ಉಳಿದ ವೃತ್ತ ಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ :


(i)

'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. $\overset{\frown}{PQ}$ ಎನ್ನುವುದು ಚಿತ್ರ (i) ನಲ್ಲಿ ಲಘು ಕಂಸ ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ (iii) ನಲ್ಲಿ ಅಧಿಕ ಕಂಸವಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು R ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. Rನ್ನು P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿರಿ.


(ii)

PQ ಕಂಸ R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ $\angle PRQ$ ಆದರೆ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ $\angle POQ$.

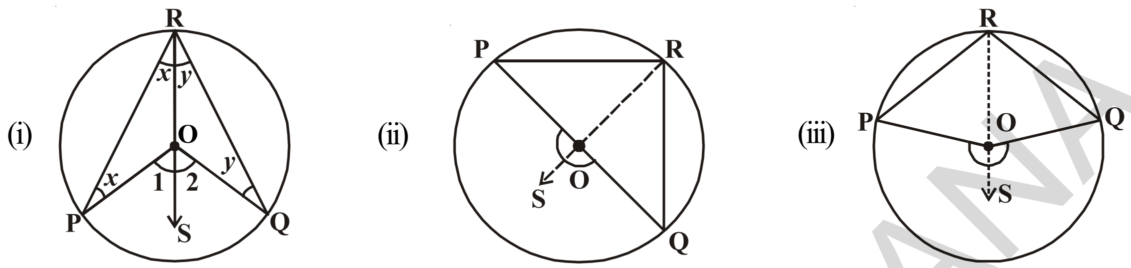

(iii)

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ತುಂಬಿಸಿರಿ.

ಕೋನ	ಚಿತ್ರ (i)	ಚಿತ್ರ (ii)	ಚಿತ್ರ (iii)
$\angle PRQ$			
$\angle POQ$			

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಹತ್ತಿರ ಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ? ಒಂದು ಕಂಸ ಕೇಂದ್ರ ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ , ಅದೇ ಕಂಸ ಉಳಿದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯ ಇರುವ ಸಂಬಂಧದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಕಂಸ ಕೇಂದ್ರ 'O' ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ ಉಳಿದ ವೃತ್ತದ ಭಾಗದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದು ಕಂಸದಿಂದ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು. ಅದೇ ಕಂಸ ವೃತ್ತದ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ : O ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ.

ಕಂಸ $\overparen{PQ}$ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ $\angle POQ$.

R ಎನ್ನುವುದು ($\overparen{PQ}$ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ) ಉಳಿದ ವೃತ್ತದ ಭಾಗದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು.

ಸಾಧನೆ : ಇಲ್ಲಿ (i) $\overparen{PQ}$ ಒಂದು ಲಘು ಕಂಸ (ii) $\overparen{PQ}$ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು (iii) $\overparen{PQ}$ ಒಂದು ಅಧಿಕ ಕಂಸ ಆಗುವ ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಿವೆ.

R ಬಿಂದುವನ್ನು 'O' ಗೆ ಸೇರಿಸಿ S ಬಿಂದುವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮೊದಲಿಡೋಣ (ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ).

ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ Δ ROP ಯಲ್ಲಿ

$OP = OR$ (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

$\therefore \angle ORP = \angle OPR$ (ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮ).

$\angle POS$ ಕೋನ Δ ROP ಗೆ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನ (ರಚನೆ)

$\angle POS = \angle ORP + \angle OPR$ ಅಥವಾ $2\ \angle ORP$ ..... (1)

($\because$ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನ ಆಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ)

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ΔROQ

$\angle SOQ = \angle ORQ + \angle OQR$ ಅಥವಾ $2\ \angle ORQ$... (2)

($\because$ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನ ಆಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ)

(1) ಮತ್ತು (2) ಗಳಿಂದ

$$\angle POS + \angle SOQ = 2\ (\angle ORP + \angle ORQ)$$

ಎಂದರೆ ಅದು $\angle POQ = 2\ \angle QRP$ ಗೆ ಸಮಾನ ..... (3)

ಸೌಲಭ್ಯಗೋಸ್ಕರ

$\angle ORP = \angle OPR = x$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$\angle POS = \angle 1$

$\angle 1 = x + x = 2x$

$\angle ORQ = \angle OQR = y$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$\angle SOQ = \angle 2$

$\angle 2 = y + y = 2y$

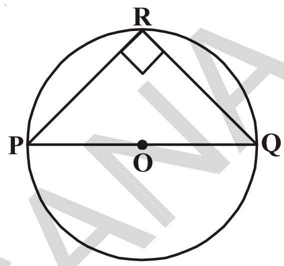
ಈಗ $\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$

$= 2\ (x+y) = 2\ (\angle PRO + \angle ORQ)$

(ಅಂದರೆ) $\angle POQ = 2\ \angle PRQ$

ಆದ್ದರಿಂದ "ಒಂದು ಕಂಸ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ , ಅದೇ ಕಂಸ ಉಳಿದ ವೃತ್ತದ ಭಾಗದ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆ" ಎನ್ನುವ ಪ್ರಮೇಯ ಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : 'O' ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ. PQ ಒಂದು ವ್ಯಾಸ. ಆದರೆ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಕೋನವು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ PQ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವೆಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

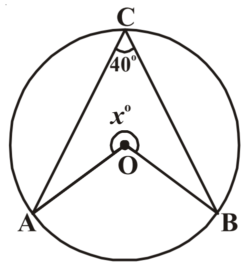
$\because \angle POQ = 180^\circ$

(ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೋನ 180°)

ಮತ್ತು $\angle POQ = 2\,\angle PRQ$ (ಒಂದು ಕಂಸ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ, ಆ ಕಂಸ ಉಳಿದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟು)

$$\therefore \angle PRQ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

ಉದಾಹರಣೆ 5 : ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x° ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ : $\angle ACB = 40^\circ$ (ದತ್ತಾಂಶ)

$\angle AOB = 2\,\angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

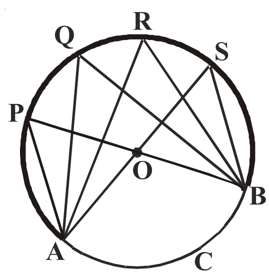
$\because \quad x^\circ + \angle AOB = 360^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ $x^\circ = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$

12.4.2 ಒಂದೇ ವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು

ನಾವು ಈಗ ಒಂದು ಕಂಸ ಒಂದೇ ವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ಲಘು ಕಂಸ AB ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ). P, Q, R ಮತ್ತು S ಗಳು ಅಧಿಕ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ ಎಂದರೆ ಉಳಿದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು. AB ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು P, Q, R ಮತ್ತು S ಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿರಿ. $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ ಮತ್ತು $\angle ASB$ ಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ.



$\because \angle AOB = 2\angle APB$ (ಏಕೆ?)

$\angle AOB = 2\angle AQB$ (ಏಕೆ?)

$\angle AOB = 2\angle ARB$ (ಏಕೆ?)

$\angle AOB = 2\angle ASB$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$

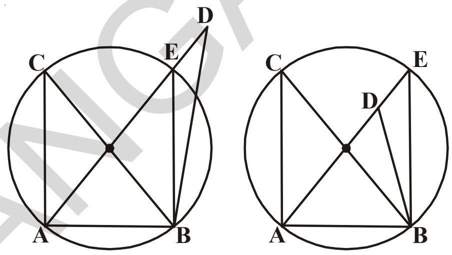
ಎಂದರೆ ಒಂದು ಕಂಸ ಒಂದೇ ವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವೆಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ..

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು P, Q, R, S ಮತ್ತು A, B ಎಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಏನೆನ್ನುತ್ತಾರೆ? ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳೆನ್ನುವರು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವನ್ನೂ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 12.4 : ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡ (ಆ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಕಡೆಯಿಂದ) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ , ಆ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲ ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಅವು ಚಕ್ರೀಯಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ : ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು A, B ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{AB}$ ಗೆ ಒಂದೇ ಕಡೆ ಇರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ C ಮತ್ತು D ಗಳ ಹತ್ತಿರ $\overline{AB}$ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು $\angle ACB$ ಮತ್ತು $\angle ADB$ ಸಮಾನವೆಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಸಾಧನೀಯ : A, B, C ಮತ್ತು D ಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದರೆ ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳು.

ರಚನೆ : ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : $\angle ACB = \angle ADB$ ಆಗುವಂತೆ, D = D ಬಿಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರದೇಹೋದರೆ.

ಆಗ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು E, AD ಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವಂತೆ (ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ) ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಎಂದರೆ A, B, C ಮತ್ತು E ಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುವುದರಿಂದ

$\angle ACB = \angle AEB$ (ಏಕೆ?)

ಆದರೆ $\angle ACB = \angle ADB$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

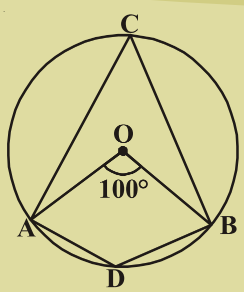
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AEB = \angle ADB$

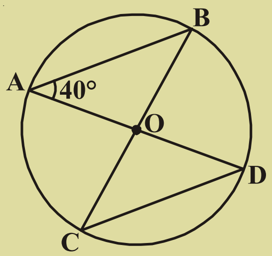
ಇದು E ಮತ್ತು D ಏಕೀಭವಿಸದೇ ಹೋದರೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ E ಕೂಡ D ದೊಂದಿಗೆ ಏಕೀಭವಿಸುತ್ತದೆ.

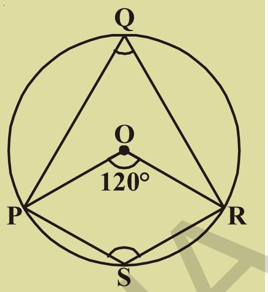
ಅಭ್ಯಾಸ – 12.4

1. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು $\angle AOB = 100^\circ$ ಆದರೆ $\angle ADB$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

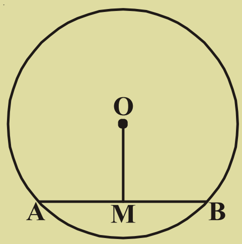




2. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle BAD = 40^\circ$ ಆದರೆ $\angle BCD$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

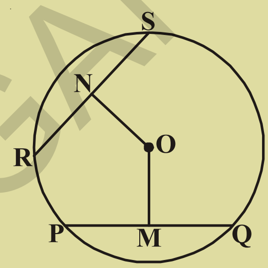


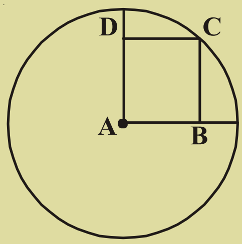
3. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು $\angle POR = 120^\circ$ ಆದರೆ $\angle PQR$ ಮತ್ತು $\angle PSR$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



4. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ OM = 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು AB = 8 ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು OM, ON ಜ್ಯಾಗಳು PQ, RS ಗಳ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು. OM = ON ಮತ್ತು PQ = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ RS ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

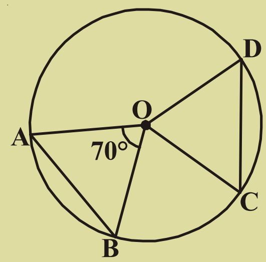




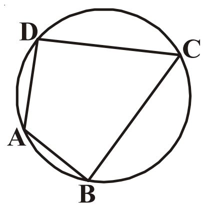
6. A ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ABCD ಒಂದು ಚೌಕ. BD = 4 ಸೆಂ.ಮೀ, ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವೆಷ್ಟು?

7. ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

8. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು AB, CD ಗಳ ಸಮಾನ ಉದ್ದ ಇರುವ ಜ್ಯಾಗಳು $\angle AOB = 70^\circ$ ಆದರೆ ΔOCD. ನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



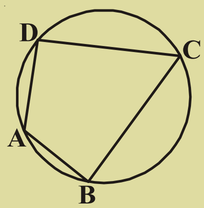
12.5 ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಚತುರ್ಭುಜ ಶೃಂಗಗಳು A,B,C ಮತ್ತು D ಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ. ಇಂತಹ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಅನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ A, B, C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳಿಂದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಅನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆಮಾಡಿ ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರಿ. ಇದೇ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ರಚಿಸಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆಮಾಡಿ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

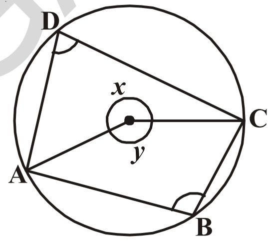


ಕ್ರ.ಸಂ.	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A+\angle C$	$\angle B+\angle D$
1						
2						
3						
4						

ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?

ಪ್ರಮೇಯ 12.5 : ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳು.

ದತ್ತ : ABCD ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ.



ಸಾಧನೀಯ : $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

ಸಾಧನೆ : $\angle D = \frac{1}{2} \angle y$ (ಏಕೆ ?) ..... (i)

$\angle B = \frac{1}{2} \angle x$ (ಏಕೆ ?) ..... (ii)

(i) ಮತ್ತು (ii) ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ.

$\angle D + \angle B = \frac{1}{2} \angle y + \frac{1}{2} \angle x$

$\angle D + \angle B = \frac{1}{2} (\angle y + \angle x)$

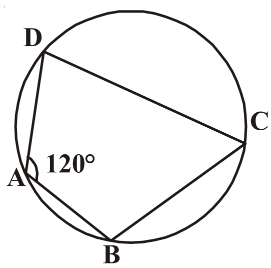
$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360°$

$\angle B + \angle D = 180°$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle A + \angle C = 180°$

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle A = 120^{\circ}$ ಆದರೆ $\angle C$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ?

ಪರಿಹಾರ : ABCD ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ



ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A + \angle C = 180^{\circ}$

$120^0 + \angle C = 180^{\circ}$

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle C = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೇನು?

"ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಆಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^o ಆದರೆ ಆ ಚತುರ್ಭುಜ ಚಕ್ರೀಯವಾಗುತ್ತದೆ ".

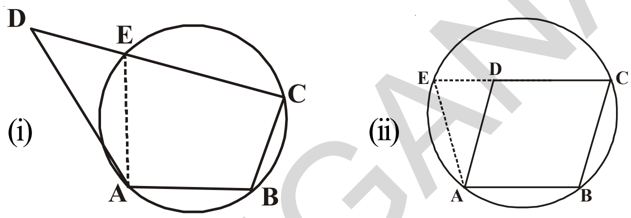
ವಿಲೋಮವು ಕೂಡ ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯವೇ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.6 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^o ಆದರೆ ಅದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ

$\angle ABC + \angle ADC = 180^o$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^o$



ಸಾಧನೀಯ : ABCD ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ.

ರಚನೆ : ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದದ ಬಿಂದುಗಳು A, B, ಮತ್ತು C ಒಳಗೊಂಡು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತ D ಮೂಲಕ ಹೋದರೆ A, B, C,D ಗಳು ಚಕ್ರೀಯಗಳಾಗುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದಂತೆ.

ಈ ವೃತ್ತ D ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಹೋಗದೇ ಹೋದರೆ ಆ ವೃತ್ತ $\overline{CD}$ ಯನ್ನು ಅಥವಾ $\overline{CD}$ ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ E ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

$\overline{AE}$ ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : ABCE ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ (ನಿರ್ಮಾಣ)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^o$ (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಆದರೆ $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$ (ದತ್ತ)

$\angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$

ಆದರೆ ಈ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು Δ ADEಯ ಅಂತರಕೋನ ಮತ್ತು ಎರಡನೇಯದು ಬಾಹ್ಯಕೋನ.

ತ್ರಿಭುಜ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನ ಯಾವಾಗಲೂ ಅದರ ಯಾವುದೇ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ವಿರೋದೋಕ್ತಿ.

ಅಂದರೆ A,B ಮತ್ತು C ಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ವೃತ್ತ D ಮೂಲಕ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವ ನಮ್ಮ ಕಲ್ಪನೆ ಅಸತ್ಯ.

$\therefore$ A,B ಮತ್ತು C ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ವೃತ್ತ D ಮೂಲಕ ಕೂಡ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

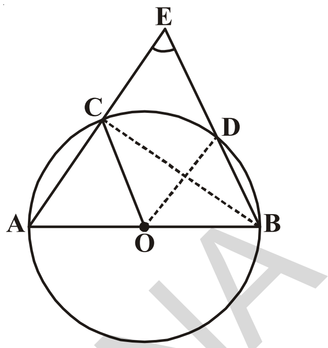
$\therefore$ A,B,C ಮತ್ತು D ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದರೆ ABCD ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸ, ಜ್ಯಾ $\overline{CD}$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮ. $\overrightarrow{AC}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{BD}$ ಗಳು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅವು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಂಡರೆ $\angle AEB = 60°$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : OC, ODಮತ್ತು BC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

Δ ODCಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ (ಏಕೆ?)

$\therefore \quad \angle COD = 60°$



ಈಗ, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (ಏಕೆ?)

ಇದರಿಂದ $\angle CBD = 30°$

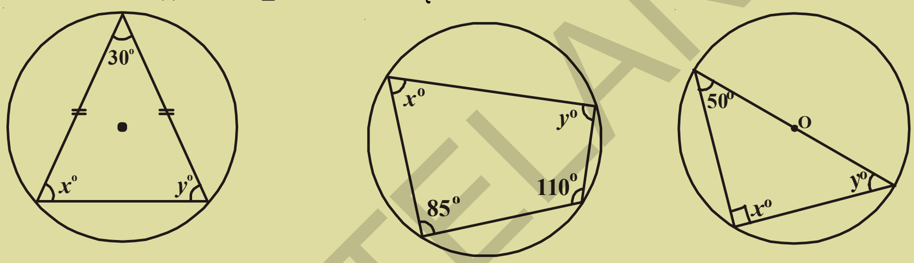
ಮತ್ತೆ $\angle ACB = 90°$ (ಏಕೆ?)

ಆಗ $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

ಇದರಿಂದ $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, i.e. $\angle AEB = 60°$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.5

1. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ..



(i) (ii) (iii)

2. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ A, B, C ಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ. ಹಾಗೆಯೇ $\angle A + \angle C = 180°$ ಆದರೆ ಶೃಂಗ D ಕೂಡ ಅದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

3. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಚಕ್ರೀಯವಾದರೆ ಅದು ಆಯತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

4. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಒಂದು ಚೌಕವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದು ಅದರೊಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೆ ಹೋದರೆ ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ.

   (ಅ) ಆಯತ

   (ಆ) ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ

   (ಇ) ಅಧಿಕ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ

   (ಈ) ಆಯತವಲ್ಲದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

   (ಉ) ಲಘುಕೋನ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

   (ಊ) $\overline{PR}$ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ PQRS ಚತುರ್ಭುಜ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

- ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಅದೇ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮುದಾಯವನ್ನು ವೃತ್ತ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಜ್ಯಾ ಎನ್ನುವರು.
- ವ್ಯಾಸ ಜ್ಯಾಗಳೆಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಮುಖಾಂತರ ಕೂಡ ಹೋಗುವ ಜ್ಯಾವನ್ನು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಎನ್ನುವರು.
- ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯ (ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು) ಗಳಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳೆನ್ನುವರು.
- ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದ ವಿಭಿನ್ನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯ್ರ ವೃತ್ತಗಳೆನ್ನುವರು.
- ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.
- ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ವೃತ್ತ ಭಾಗವನ್ನು ಕಂಸ ಎನ್ನುವರು.
- ಒಂದೇ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಕಂಸರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರಾಂತವನ್ನು ವೃತ್ತ ಖಂಡ ಎನ್ನುವರು. ಕಂಸರೇಖೆ ಲಘು ಕಂಸವಾದರೆ ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡವೆಂದು ಅಧಿಕ ಕಂಸವಾದರೆ ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ ಎನ್ನುವರು.
- ಒಂದು ಕಂಸರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಮಧ್ಯ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರಾಂತವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರಖಂಡ ಎನ್ನುವರು.
- ಸಮಾನ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ.
- ಒಂದೇ ವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ. ಅರ್ಧವೃತ್ತ ಖಂಡದೊಳಗಿನ ಕೋನ ಲಂಬಕೋನವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮಾನ.
- ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ , ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮ ಕೂಡ ಸತ್ಯವೇ.
- ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕಸ ಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಇರುತ್ತದೆ.
- ತ್ರಿಭುಜ ಶೃಂಗಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತ ಎನ್ನುವರು.
- ಸಮಾನ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನ.
- ಒಂದು ಕಂಸ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ ಅದೇ ಕಂಸ ಉಳಿದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟು.
- ಒಂದು ಕಂಸ ಉಳಿದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ 90 ಆದರೆ ಅ ಕಂಸ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾ ಖಂಡ ಆ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಕಡೆಗೆ ಇರುವ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ.
- ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಮೊತ್ತ 180°.

ಅಧ್ಯಾಯ
13

ರೇಖಾಗಣಿತ ರಚನೆಗಳು

13.1 ಪರಿಚಯ :

ರೇಖಾಗಣಿತ ಚಿತ್ರಗಳಾದ ರೇಖಾಖಂಡ, ಕೋನ, ತ್ರಿಭುಜ, ಚತುರ್ಭುಜ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಉಪಕರಣಗಳು ಅವಶ್ಯಕ. ನಿಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಉಪಕರಣಗಳ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಕೇಲು, ಒಂದು ಜೊತೆ ಮುಮ್ಮೂಲೆಪಟ್ಟಿಗಳು, ವಿಭಾಜಕ. ಕೈವಾರ ಮತ್ತು ಕೋನಮಾಪಕ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಈ ಉಪಕರಣಗಳೆಲ್ಲ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವವೇ ಆದರೆ ರೇಖಾಗಣಿತ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ನಾವು ಎರಡು ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅವು ಸ್ಕೇಲು ಮತ್ತು ಕೈವಾರ. ನಾವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ರಚನೆಗೆ, ಚತುರ್ಭುಜ ರಚನೆಗೆ ಇವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದಾಗ ಸ್ಕೇಲು ಮತ್ತು ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳು ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತಕ್ಷಣವೇ ಚಿತ್ರ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತಕ್ಷಣವೇ ರಚಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಿಂದ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಬೇಕಾದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡುತ್ತವೆಯೋ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

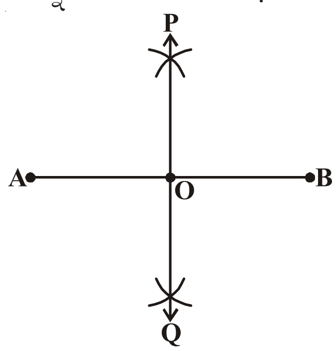
13.2 ಮೌಲಿಕ ರಚನೆಗಳು :

ನೀವು (i) ರೇಖಾ ಖಂಡಕ್ಕೆ ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು, (ii) ಕೊಟ್ಟ ಕೋನಗಳಾದ 30°, 45°, 60°, 90° ಮತ್ತು 120° ಅಥವಾ ಯಾವುದೇ ಕೋನಕ್ಕೆ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಈ ರಚನೆಗಿರುವ ಕಾರಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿಲ್ಲ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತಿ ರಚನೆಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡಿ, ರಚಿಸಿ, ತಕ್ಕ ನಿರೂಪಣೆಗಳಿಂದ ನಾವು ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

13.2.1 ದತ್ತ ರೇಖಾ ಖಂಡಕ್ಕೆ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ(ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆ)ವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು:

ಉದಾಹರಣೆ -1. AB ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆದು ರಚನೆಯನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು



ಹಂತ 1 : AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 2 : A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ $\frac{1}{2}\overline{AB}$ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ರೇಖಾಖಂಡದ ಎರಡೂ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 3 : 'B' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಅದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಮೊದಲು ಎಳೆದ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಇನ್ನೆರಡು ಕಂಸಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಹಂತ 4 : ಕಂಸಗಳು ಛೇಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು P ಮತ್ತು Q ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ. P Q ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

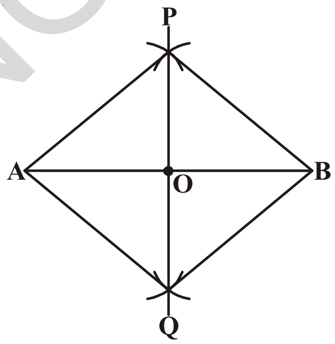
ಹಂತ 5 : PQ ರೇಖೆ $\overline{AB}$ ಅನ್ನು O ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಿ.

AB ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಖೆ POQ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ರೇಖೆ.

ಮೇಲಿನ ರಚನೆಯಿಂದ ABರೇಖೆಗೆ , "PQ ಒಂದು ಲಂಭಾರ್ಧರೇಖೆ ಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಹೇಗೆ ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು.

ರಚನೆಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆದು, A ನ್ನು P ಮತ್ತು A ನಿಂದ Q ಹಾಗೆಯೇ B ಅನ್ನೂ P ಮತ್ತು Bನಿಂದ Q ಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಾವು ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.



ಸಾಧನೆ (Proof):

ಹಂತಗಳು	**ಕಾರಣಗಳು**
Δ^s PAQ ಮತ್ತು ΔPBQ ಗಳಲ್ಲಿ	
$AP = BP$; $AQ = BQ$	(ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)
$PQ = PQ$	(ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)
$\therefore\ \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	(ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಸಿದ್ಧಾಂತ)
ಆಗ$\angle APO = \angle BPO$	(ಸರ್ವಸಮಾನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮ)
ಈಗ Δ^s APO ಮತ್ತು BPO ಗಳಲ್ಲಿ	
$AP = BP$	(ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತೆ, ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)
ಆದರೆ $\angle APO = \angle BPO$	(ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ)
$OP = OP$	(ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)
$\therefore\ \Delta APO \cong \Delta BPO$	(ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ)

ಆದ್ದರಿಂದ$OA = OB$ ಮತ್ತು $\angle APO = \angle BPO$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರ.

$\angle AOP + \angle BOP = 180^\circ$ (ಸರಳ ಯುಗ್ಮ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle APO = \angle BPO = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (ಮೇಲಿನ ಹಂತದ ಆಧಾರವಾಗಿ ಫಲಿತಾಂಶ)

ಆದ್ದರಿಂದ PO ಎಂದರೆ POQ ರೇಖೆ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

AB ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ .

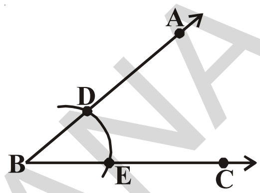
13.2.2 ದತ್ತ ಕೋನಕ್ಕೆ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ ರಚಿಸುವುದು :

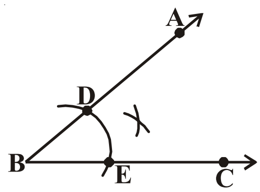
ಉದಾಹರಣೆ 2: ದತ್ತ ಕೋನಕ್ಕೆ $\angle ABC$ ಗೆ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

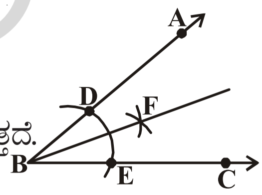
ಹಂತ 1 : ದತ್ತ ಕೋನ $\angle ABC$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರಿ.

ಹಂತ 2 : B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಸ್ವಲ್ಪ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ ಕಿರಣಗಳನ್ನು D,E ಗಳ ಹತ್ತಿರ ಭೇದಿಸುವಂತೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.





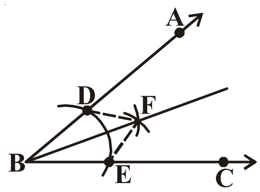
ಹಂತ 3 : E ಮತ್ತು D ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿ ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಎರಡು ಕಂಸಗಳನ್ನು F ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಹಂತ 4 : BF ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದೇ $\angle ABC$ ಗೆ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ರಚನೆಯನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. D, F ಮತ್ತು E, F ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. (ತ್ರಿಭುಜ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.)

ಸಾಧನೆ :



ಹಂತಗಳು	**ಕಾರಣಗಳು**
Δ^s BDF ಮತ್ತು ΔBEF ಗಳಲ್ಲಿ	(ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ತ್ರಿಭುಜಗಳು)
$BD = BE$	(ಒಂದೇ ಕಂಸದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)
$DF = EF$	(ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಇರುವ ಕಂಸಗಳು)
$BF = BF$	(ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)
$\therefore \Delta BDF \cong \Delta BEF$	(ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ)
ಆಗ $\angle DBF = \angle EBF$	(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)

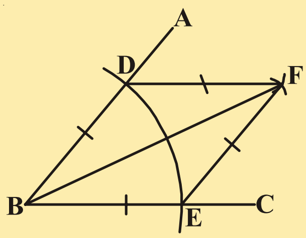
ಆದ್ದರಿಂದ BF ಎನ್ನುವುದು $\angle ABC$ ಗೆ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

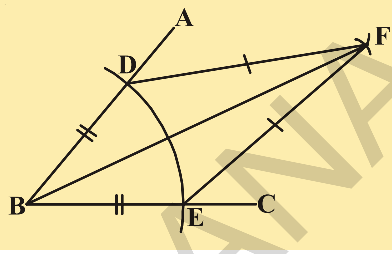
ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳನ್ನು, ಕೋನಗಳನ್ನು, ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅವುಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಬರೆಯಿರಿ.

1.



2.

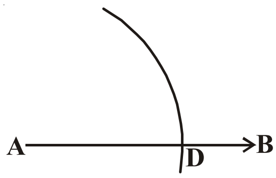


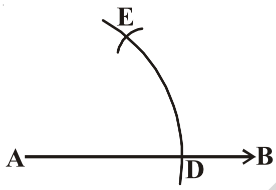
13.2.3 ಕೊಟ್ಟ ಕಿರಣದ ಮೊದಲ ಬಿಂದು ಹತ್ತಿರ 60° ಕೋನ ರಚಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ -3: ಮೊದಲ ಬಿಂದು A ಯಿಂದ AB ಕಿರಣ ಎಳೆದು $\angle BAC = 60^\circ$ ಆಗುವಂತೆ AC ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

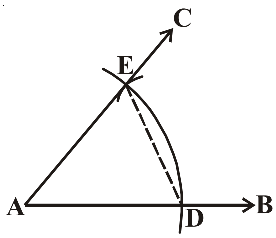
ಹಂತ 1 : AB ಕಿಣವನ್ನು ಎಳೆದು ಸ್ವಲ್ಪ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ AB ಯನ್ನು D ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.





ಹಂತ 2 : D ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಅಷ್ಟೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಮೊದಲು ಎಳೆದ ಕಂಸವನ್ನು, E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ)

ಹಂತ 3 : E ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತಿರುವಂತೆ AC ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಕೋನ $\angle BAC = 60^\circ$ ಬರುತ್ತದೆ.



ನಾವು ಮಾಡಿದ ರಚನೆವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ DE ಅನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಹಂತಗಳು	ಕಾರಣಗಳು
Δ ADE ಅಲ್ಲಿ	(ಒಂದೇ ವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)
AE = AD	(ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ)
AD = DE	(ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಕಂಸಗಳು)
ಆಗ AE = AD = DE	(ಸಮಾನ ಕಂಸಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳು)
$\therefore$ Δ ADE ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಆಗುತ್ತದೆ	(ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನ)
$\angle EAD = 60^\circ$	(ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಕೋನ)
$\angle BAC$ $\angle EAD$ ಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ	($\angle EAD$ ಎನ್ನುವುದು $\angle BAC$ ಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಭಾಗ)
$\angle BAC = 60^\circ$	ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಕಂಸಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ವೃತ್ತ ಎಷ್ಟು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ? ನೀನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಲ್ಲೆ? ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 13.1

1. ಮೂಲಬಿಂದು ಹತ್ತಿರ ದತ್ತ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ರಚನೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   (a) 90^o (b) 45^o

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಸ್ಕೇಲು, ಕೈವಾರ ಸಹಾಯದಿಂದ ರಚಿಸಿ ಕೋನಮಾಪಕದಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

   (a) 30^o (b) $22\frac{1}{2}^o$ (c) 15^o

   (d) 75^o (e) 105^o f) 135^o

3. ದತ್ತ ಬಾಹು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ರಚನೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4. ದತ್ತ ಬಾಹುವನ್ನು ಪಾದವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ದತ್ತ ಕೋನ ತಿಳಿದರೆ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ರಚನೆಯನ್ನು ರುಜುವಾತು ಮಾಡಿರಿ.

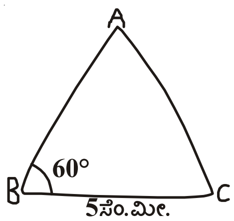
   [ಸೂಚನೆ : ರಚನೆಗಾಗಿ ನೀವು ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಬಾಹುವಿಗೆ ಮತ್ತು ಕೋನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು]

13.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳು (ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳು)

ನಾವು ಇಷ್ಟುವರೆಗೆ ಕೆಲವು ಮೌಲಿಕ (basic) ರಚನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ರಚನೆಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕೆಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ತ್ರಿಭುಜ ಸರ್ವಸಮಾನ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಾದ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. , ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ., ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಮತ್ತು ಲಂ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಜ್ಞಾನಪಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ನೀವು ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜದ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ ಅಲ್ಲವೆ !

ತ್ರಿಭುಜ ರಚನೆಗೆ ಕನಿಷ್ಟ 3 ಅಳತೆಗಳು ಅವಶ್ಯಕವೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾರೆವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನವಲ್ಲದ್ದು) ಕೊಟ್ಟರೆ ನಾವು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ರಚನೆ ಮಾಡಲಾರೆವು. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಇಚ್ಚಿಸಿದ ಸಂಯೋಜನೆಗಳು ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ., ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ., ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ. ಮತ್ತು ಲಂ.ಕೋ.ಬಾ. ಮುಂತಾದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

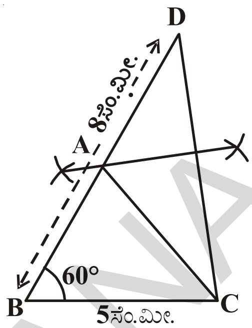
13.3.1 ರಚನೆ : ಪಾದ, ಪಾದದ ಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.



ಉದಾಹರಣೆ -4: BC = 5 ಸೆಂ.ಮೀ AB + AC = 8 ಸೆಂ.ಮೀ . ಮತ್ತು $\angle ABC = 60^o$ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ΔABC ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

ಹಂತ 1 : ΔABC ಯ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನೆಳೆದು ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.
($AB + AC = 8$ಸೆಂ.ಮೀ. ಅನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು ?)
ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರನೇ ಶೃಂಗ A ಯನ್ನು ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸುವಿರಿ?



ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : $AB + AC = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದ್ದರಿಂದ BA ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ದಿಸಿದರೆ
$BD = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುತ್ತದೆ.

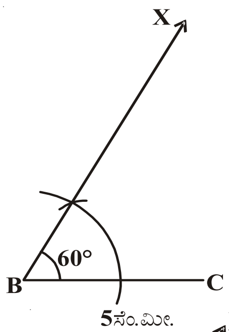
$\therefore$ $BD = BA + AD = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದರೆ $AB + AC = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. (ದತ್ತಾಂಶ)

$\because$ $AD = AC$

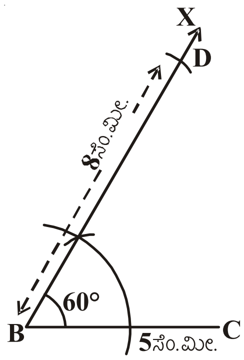
BD ಯ ಮೇಲೆ A ಅನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದಕ್ಕೆ ನೀವು ಏನು ಮಾಡುತ್ತೀರಿ?

A ಬಿಂದುವು C ಮತ್ತು D,ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ $\overline{CD}$ ಯ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆ BD ಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸುವ ಬಿಂದು A ಆಗುತ್ತದೆ..

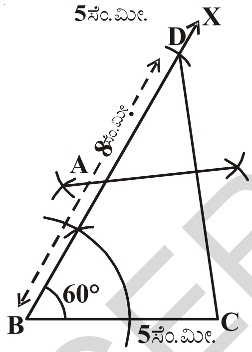


ಆದರೆ $AB + AC = BD$ ಎಂದು ಹೇಗೆ ಸಾಧಿಸುವಿರಿ?

ಹಂತ 2 : $BC = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. (ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ) ರೇಖಾ ಖಂಡ ಎಳೆದು B ಹತ್ತಿರ $\angle CBX = 60^\circ$ ರಚಿಸಿ

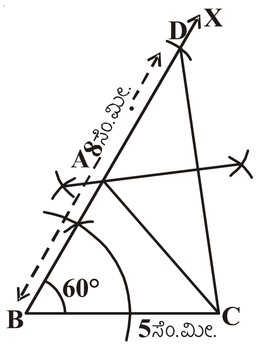


ಹಂತ 3: B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ($AB + AC = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.) $\overrightarrow{BX}$ ಮೇಲೆ D ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಹಂತ 4 : C,D ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು CD ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು BD ಯನ್ನು A ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 5 : A,C ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ABC ತ್ರಿಭುಜ ಬರುತ್ತದೆ.
ನಾವು ಈಗ ರಚನೆವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.



ಸಾಧನೆ : A ಬಿಂದು $\overline{CD}$ ಯ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

$\therefore$ $AC = AD$

$AB + AC = AB + AD$

$= BD$

$= 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ .ΔABC ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆಲೋಚಿಸಿರಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$BC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ, $\angle B = 60^\circ$ ಮತ್ತು $AB + AC = 5$ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಂದ ABC ನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಇಲ್ಲದೇ ಹೋದರೆ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

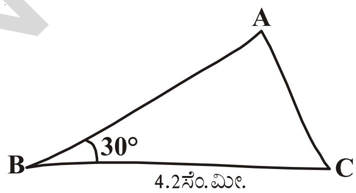
13.3.2 ರಚನೆ: ಪಾದ, ಪಾದದ ಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ABC ಯಲ್ಲಿ ಪಾದ BC ಯಾಗಿ ಕೊಟ್ಟು, ಪಾದ ಕೋನ $\angle B$ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $AB > AC$ ಆದರೆ ಅದು AB-AC ಆಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ $AB<AC$ ಆದರೆ AC-AB ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಈ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

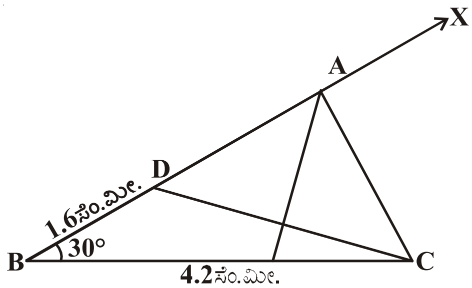
ಸಂದರ್ಭ (i) $AB > AC$ ಆದರೆ

ಉದಾಹರಣೆ -5: $BC = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. $\angle B = 30^\circ$ ಮತ್ತು $AB - AC = 1.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಂದ ΔABC ಅನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

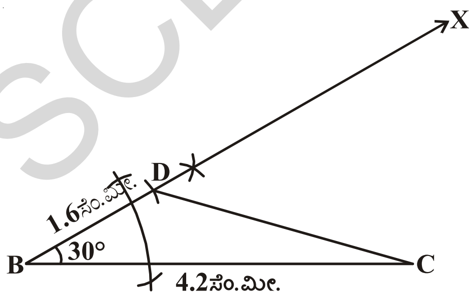
ಪರಿಹಾರ : ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು



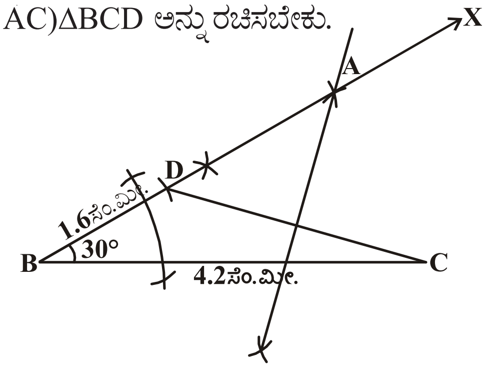
ಹಂತ 1: ΔABC ಯ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರ ಎಳೆದು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ($AB - AC = 1.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸುವಿರಿ ?)



ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : $AB - AC = 1.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $AB > AC$ ಆಗುತ್ತದೆ. $AD = AC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಈಗ $BD = AB - AC = 1.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದ್ದರಿಂದ C,D ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಮೂರನೇ ಶೃಂಗ A ನ್ನು BD ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.ಅವಶ್ಯಕವಿದ್ದಲ್ಲಿ BD ನ್ನು ವೃದಿಸಬೇಕು. A,C ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಬರುತ್ತದೆ.

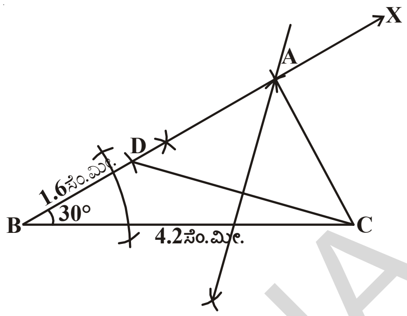


ಹಂತ 2: ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ತ್ರಿಭುಜ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $BC = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. , $\angle B = 30^0$ ಮತ್ತು $BD = 1.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. (ಅದು AB - AC) ΔBCD ಅನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.



ಹಂತ 3 : CD ಯ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು BDX ರೇಖೆಯನ್ನು A ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 4: A,C ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ΔABC ಬರುತ್ತದೆ.



ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ

ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಕೋನ $\angle B$ ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $\angle C$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸಿದರೆ ತ್ರಿಭುಜ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆಯೇ? ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರ ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಸಂದರ್ಭ (ii) $AB < AC$ ಆದರೆ

ಉದಾಹರಣೆ 6. $BC = 5$ಸೆಂ.ಮೀ. , $\angle B = 45^o$ ಮತ್ತು $AC - AB = 1.8$ ಸೆಂ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

ಹಂತ 1: ΔABC ಯ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ $AC - AB = 1.8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲಿರೋ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿರಿ.

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : $AB < AC$ ಆದ್ದರಿಂದ $AC - AB = 1.8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ನ್ನು BD ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದರೆ $AD = AC$ ಆಗುವಂತೆ AC ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

ಈಗ $BD = AC - AB = 1.8$ ಆಗುತ್ತದೆ. ($\because$ $BD = AD - AB$ ಮತ್ತು $AD = AC$)

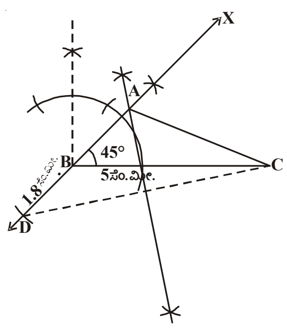
C,D ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ CD ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದರ ಮೇಲೆ A ಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಹಂತ 2 : $BC = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾ ಖಂಡ ಎಳೆದು, $\angle CBX = 45^\circ$ ಆಗುವಂತೆ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 1.8 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ($BD = AC - AB$) ಒಂದು ಕಂಸ ಎಳೆದರೆ ಅದು $\overrightarrow{BX}$ ರೇಖೆಯನ್ನು BC ಗೆ ಎದುರಾಗಿ ವೃದ್ದಿಸಿದರೆ ಅದು D ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 3 : DC ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಹಂತ 4 : ಇದು $\overrightarrow{BX}$ ರೇಖೆಯನ್ನು A ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. AC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ΔABC ಬರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಮೇಲಿನ ರಚನೆಯನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸೋಣ.



ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ΔABC ಅಲ್ಲಿ ಪಾದ BC ಯನ್ನು B ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. DC ಯ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ A ಬಿಂದು ಇದೆ ಆದ್ದರಿಂದ

$\therefore$ $AD = AC$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಎಂದರೆ $AB + BD = AC$

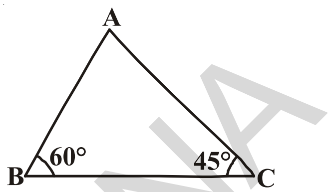
ಆಗ $BD = AC - AB$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$= 1.8$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಇದೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜ ΔABC ಆಗುತ್ತದೆ.

13.3.3 ರಚನೆ : ತ್ರಿಭುಜ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ಪಾದಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು.

ABC ಯಲ್ಲಿ ಪಾದಕೋನಗಳು $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ AB + BC + CA ಆಗಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ನೀವು ತ್ರಿಭುಜABC ಅನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ? ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.



ಉದಾಹರಣೆ -7. ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 60^o$, $\angle C = 45^o$ ಮತ್ತು AB + BC + CA = 11 ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

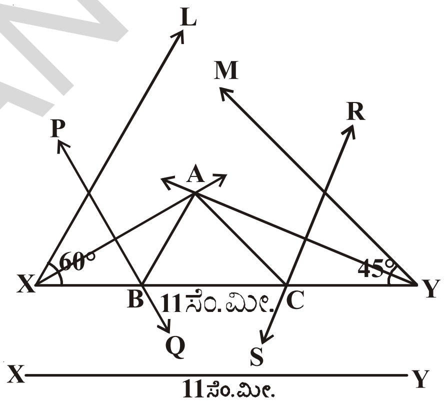
ಪರಿಹಾರ : ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

ಹಂತ 1 : ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆದು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. (ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸುವಿರಿ?)

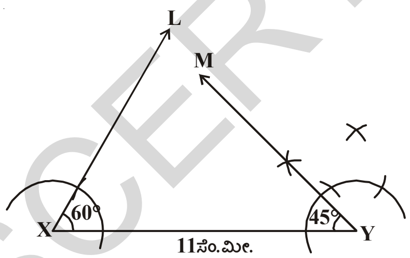
ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ AB + BC + CA ಗೆ ಸಮಾನವಾಗುವ ರೇಖಾಖಂಡ XY ಅನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು $\angle B$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ $\angle YXL$ ಯನ್ನು, $\angle C$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗುವಂತೆ $\angle XYM$ ನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಅವುಗಳಿಗೆ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಈ ಎರಡು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು A ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

AX ನ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆ XY ನ್ನು B ಹತ್ತಿರ, AY ನ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆ C ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. AB, AC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಬರುತ್ತದೆ.



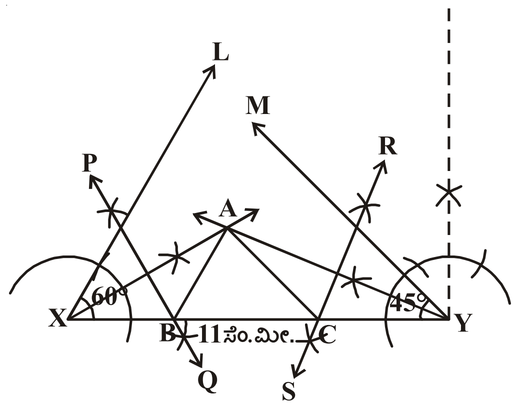
ಹಂತ 2: XY = 11 ಸೆಂ.ಮೀ. (ಏಕೆಂದರೆ XY = AB + BC + CA) ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಹಂತ 3 : $\angle YXL = 60^o$ ಮತ್ತು $\angle XYM = 45^o$ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅವುಗಳಿಗೆ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಹಂತ 4 : ಈ ಎರಡು ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು ಕತ್ತಿರಿಸಿದ ಬಿಂದುವಿಗೆ A ಎಂದು ಹೆಸರಿಡಿರಿ.

ಹಂತ 5 : AX ಮತ್ತು AY ಗಳಿಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅವು $\overrightarrow{XY}$ ಅನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ B ಮತ್ತು C ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. AB ಮತ್ತು ACಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಬರುತ್ತದೆ.



ಈ ರಚನೆಯನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : AX ನ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆ PQ ಮೇಲೆ B ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ XB = AB ಮತ್ತು ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ CY = AC

ಇದರಿಂದ AB + BC + CA = XB + BC + CY

$= XY$

ಮತ್ತೆ $\angle BAX = \angle AXB$ ($\because$ ΔAXB ಯಲ್ಲಿ XB = AB) ಮತ್ತು

$\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB$

(ΔABC ಯ ಬಾಹ್ಯಕೋನ).

$= 2\angle AXB$

$= \angle YXL$

$= 60^o$.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle ACB = \angle XYM = 45^o$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $\angle B = 60°$ ಮತ್ತು $\angle C = 45°$ ಕೊಟ್ಟ ಹಾಗೆ ರಚಿಸಲಾಗಿವೆ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :

ಈ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ?

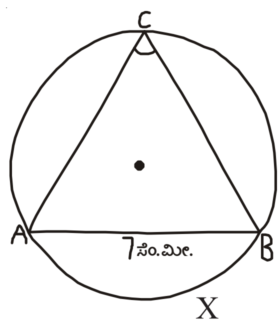
(ಸೂಚನೆ : $\angle YXL = \dfrac{60°}{2} = 30°$

ಮತ್ತು $\angle XYM = \dfrac{45°}{2} = 22\frac{1}{2}°$)

13.3.4 ರಚನೆ : ದತ್ತ ಜ್ಯಾ , ದತ್ತ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತ ಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

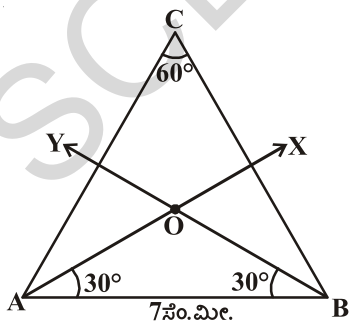
ಉದಾಹರಣೆ -8: 7ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದ ಇರುವ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ ಮೇಲೆ 60° ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ವೃತ್ತ ಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು



ಹಂತ -1: ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು 60° ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡದ (ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ ಎಳೆಯಬೇಕು ಹೇಗೆ?) ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. AB ಎನ್ನುವುದು ನಮಗೆ ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು C = 60° ಕೋನ ಇರುವ ACB ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸಬೇಕು.



$\overparen{AXB}$ ಕಂಸವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ C ಹತ್ತಿರ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ 60° ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$\angle ACB = 60°$, ಆದರೆ $\angle AOB = 60° \times 2 = 120°$

ΔOAB ಯಲ್ಲಿ OA=OB (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು) ಆದ್ದರಿಂದ

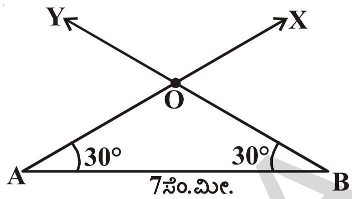
$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

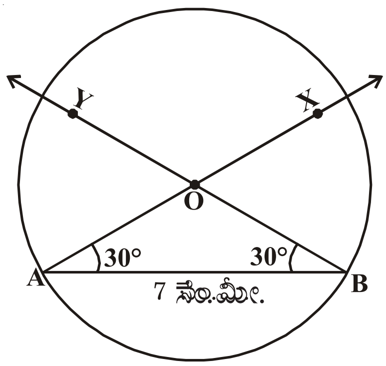
ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ΔOAB ಅನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಆಗ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ OA=OB ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ -2 : $AB = 7$ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾ ಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಹಂತ -3 $\angle BAX = 30°$ ಮತ್ತು $\angle YBA = 30°$ ಇರುವಂತೆ $\overrightarrow{AX}$ $\overrightarrow{BY}$ ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅವು O ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ..

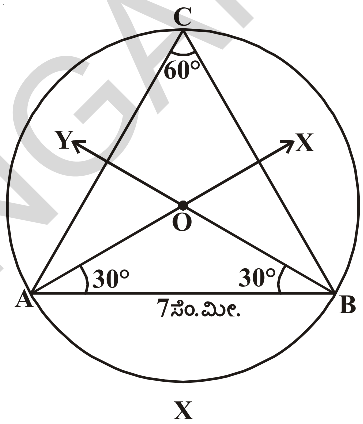
[ಸೂಚನೆ : ಕೈವಾರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 60^{o} ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ 30^{o} ಕೋನ ಬರುತ್ತದೆ.]





ಹಂತ -4 : 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ $OA = OB, = r$ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹಂತ -5 : ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ 'C' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. A, C ಗಳು ಮತ್ತು B, C ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ $\angle ACB = 60°$ಬರುತ್ತದೆ.



ಈ ವೃತ್ತಖಂಡ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ವೃತ್ತಖಂಡ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ರಚನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : $OA = OB$ (ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ).

$\therefore \quad \angle OAB + \angle OBA = 30° + 30° = 60°$

$\therefore \quad \angle AOB = 180° - 60° = 120°$

$\overset{\frown}{AXB}$ ಕಂಸವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹತ್ತಿರ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ $120°$.

$\therefore \quad \angle ACB = \dfrac{120°}{2} = 60°$

$\therefore$ ಆದ್ದರಿಂದ ACB ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ವೃತ್ತಖಂಡ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಕೊಟ್ಟ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿನ ಕೋನ 'ಲಂಬಕೋನ 'ಆದರೆ ಅದು ಎಂತಹ ವೃತ್ತಖಂಡವಾಗುತ್ತದೆ? ಚಿತ್ರ ಬರೆದು ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 13.2

1. $BC = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ, $\angle B = 75^{\circ}$ ಮತ್ತು $AB + AC = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ ΔABC ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
2. $QR = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ, $\angle B = 60°$ ಮತ್ತು $PQ - PR = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ ΔPQR ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
3. $\angle Y = 30^{\circ}$, $\angle Z = 60^{\circ}$ ಮತ್ತು $XY + YZ + ZX = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ Δ XYZ ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

4. ಪಾದ 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ ಕರ್ಣ, ಮೂರನೇ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತ 15 ಸೆಂ.ಮೀಯಾಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
5. 5 ಸೆಂ.ಮೀ ಉದ್ದ ಇರುವ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

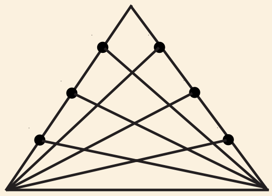
   i. 90° ii. 45° iii. 120°

ನಾವು ಏನನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ?

1. ರೇಖಾಗಣಿತ ಚಿತ್ರ ನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಎರಡು ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದ ಸ್ಕೇಲು ಮತ್ತು ಕೈವಾರ.
2. ಕೆಳಗಿನ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಆಕಾರದ ರಚನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು, ತರ್ಕಾಶಾಸ್ತ್ರೋಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದು.
   - ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆ ಎಳೆಯುವುದು.
   - ದತ್ತ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ ಎಳೆಯುವುದು.
   - ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಕೊಟ್ಟ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ 60° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
3. ಪಾದ, ಪಾದಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
4. ಪಾದ, ಪಾದಕೋನ ಮತ್ತು ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
5. ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಖಂಡವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
6. ದತ್ತ ಜ್ಯಾ, ದತ್ತ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತ ಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಗೆ ಪರೀಕ್ಷೆ

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿವೆ?
(ಇದನ್ನು ಸಿವಿಯನ್ ('Cevian') ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. 'ಸಿವ ' ಎನ್ನುವ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನ ಗೌರವಾರ್ಥವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಈ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.)



(ಸೂಚನೆ : ಪ್ರತಿ ಶೃಂಗದಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆಯಲಾದ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳು 'n' ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

14 ಸಂಭವನೀಯತೆ

ಸಾಮಾನ್ಯ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುವುದೇ ಸಂಭವನೀಯತೆ

- Pierre-Simon Laplace

14.1 ಪರಿಚಯ

ಸಿದ್ದೂ ಮತ್ತು ವಿವೇಕ್ ಒಂದೇ ತರಗತಿ ಓದುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದು ದಿನ ಊಟದ ವಿರಾಮ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾತಾನಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಇವರ ಸಂಭಾಷಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ದೂ : ಹಲೋ ವಿವೇಕ್, ಈ ದಿನ ಸಂಜೆ ಏನು ಮಾಡುವೆ ?

ವಿವೇಕ್ : ಇನ್ನೂ ಏನನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಂಡಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಟಿ.ವಿ.ಯಲ್ಲಿ ಭಾರತ, ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯಾ ತಂಡಗಳ ಮಧ್ಯೆ ನಡೆಯುವ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟವನ್ನು ನೋಡುವ ಅವಕಾಶ ಹೆಚ್ಚು.

ಸಿದ್ದೂ : ಟಾಸ್ ಯಾರು ಗೆಲ್ಲಬಹುದೆಂದು ಅಂದುಕೊಳ್ಳುವೆ ?

ವಿವೇಕ್ : ಎರಡೂ ತಂಡಗಳಿಗೆ ಗೆಲ್ಲುವ ಅವಕಾಶಗಳಿವೆ.
ನೀನು ನಿಮ್ಮ ಮನೆಯಲ್ಲೇ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ನೋಡುವೆಯಾ ?

ಸಿದ್ದೂ : ನಮ್ಮ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ಪಂದ್ಯ ನೋಡುವ ಅವಕಾಶವಿಲ್ಲ.
ಏಕೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ಟಿ.ವಿ. ರಿಪೇರಿಯಲ್ಲಿದೆ.

ವಿವೇಕ್ : ಹೌದಾ! ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಮನೆಗೆ ಬರಬಹುದಲ್ಲದೇ !
ನಾವಿಬ್ಬರೂ ಸೇರಿ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ನೋಡಬಹುದು.

ಸಿದ್ದೂ : ಮನೆಗೆಲಸ (ಹೋಂವರ್ಕ್) ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿಕೊಂಡು ಬರುವೆ.

ವಿವೇಕ್ : ನಾಳೆ ಅಕ್ಟೋಬರ್ 2, ಗಾಂಧೀ ಜಯಂತಿ ಪ್ರಯುಕ್ತ ರಜೆಯಲ್ಲವೇ!
ನೀನು ಹೋಂವರ್ಕ್‌ನ್ನು ನಾಳೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಸಿದ್ದೂ : ಇಲ್ಲ. ಮೊದಲು ಹೋಂವರ್ಕ್ ಮಾಡಿದ ನಂತರವೇ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ನೋಡುವೆ.

ವಿವೇಕ್ : ಸರಿ ಹಾಗದರೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸಂಭಾಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಭಾರತ, ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯಾ ತಂಡಗಳ ಮಧ್ಯೆ ನಡೆಯುವ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ನೋಡುವ ಅವಕಾಶ ಹೆಚ್ಚಿದೆ.

ನಮ್ಮ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ನೋಡುವ ಅವಕಾಶವಿಲ್ಲ.

ಟಾಸ್ ಗೆಲ್ಲಲು ಎರಡೂ ತಂಡಗಳಿಗೆ ಸಮ ಅವಕಾಶಗಳು ಇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಸಿದ್ದೂ ಮತ್ತು ವಿವೇಕ್ ನಡಯಬಲ್ಲ ವಿಷಯಗಳ ಕುರಿತು, ಅವು ಏರ್ಪಡುವ ಅವಕಾಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಬಹಳ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದಾಗ ಹಿಂದಿನ ಅನುಭವಗಳನ್ನು, ಸ್ವಂತ ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣಗೆ, ಹೊರಗೆ ಅಹ್ಲಾದಕರ ವಾತಾವರಣವಿದೆ. ಈ ದಿನ ಛತ್ರಿ ಇಲ್ಲದೇ ಹೊರಗೆ ಹೊಗುವೆ.

ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ನಿರ್ಣಯಗಳು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ನಮಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಿ, ಅನಾನುಕೂಲವಾಗಿರಬಹುದು. ಮತ್ತೊಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಮೇರಿ ಮಳೆಗಾಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿದಿನ ತನ್ನ ಛತ್ರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಶಾಲೆಗೆ ನಡೆದು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದಳು. ಆದರೆ ಎಂದೂ ಮಳೆ ಬೀಳಲಿಲ್ಲ. ಆದೆರ ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದಿನ ಛತ್ರಿ ಮರೆತು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋದಳು. ಅಂದೇ ಬಹಳ ಮಳೆ ಬಿದ್ದಿತು.

ಮತ್ತೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಚ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನ ಆಕಾಶ ಮೇಘಾವೃತವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಳು. ಅದು ಬೇಸಿಗೆ ಕಾಲವಾಗಿದ್ದರೂ ಛತ್ರಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೊರಗೆ ಹೋದಳು. ಸ್ವಲ್ಪ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಜೋರಾಗಿ ಮಳೆ ಬಂದಿತು. ಛತ್ರಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೋದದ್ದು ಆಕೆಗೆ ಎಷ್ಟೋ ಉಪಯೋಗವಾಗಿದೆ. ಆಕೆ ಮಳೆಯಲ್ಲಿ ನೆನೆಯದೇ ಮನೆಗೆ ಬಂದಳು.

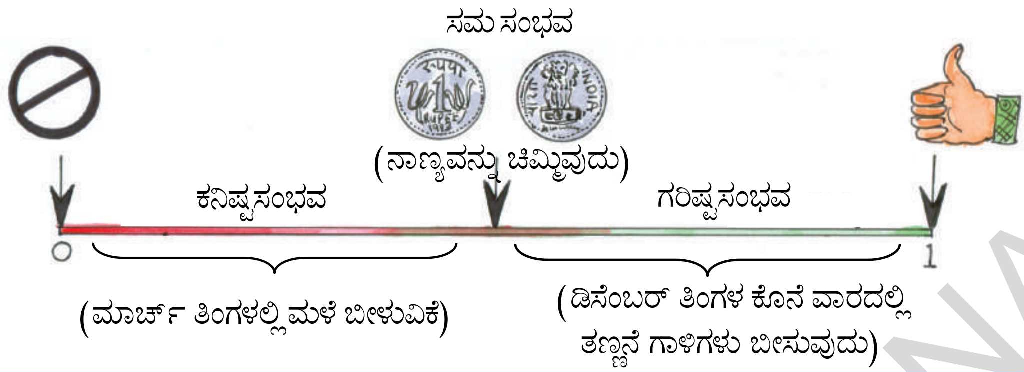
ಭವಿಷ್ಯತ್‌ನಲ್ಲಿ ನಡೆಯಬಹುದಾದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ನಿರ್ಣಯಗಳು ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ನಡೆಯಬಹದು. ಅಥವಾ ನಡೆಯದಿರಬಹದು. ಮತ್ತೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಳೆ ಬೀಳುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಊಹಿಸಿದಳು. ಈ ರೀತಿ ನಮ್ಮ ನಿರ್ಣಯಗಳು ಕೆಲವೊಮ್ಮ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೇ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ನಿಜವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. (ಏಕೆ?)

ನಾವು ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆಯೋ, ಭವಿಷ್ಯತ್‌ನಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಘಟನೆಗಳು, ಅವು ಸಂಭವಿಸುವ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸಂಭವಿಸದಿರುವ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅಳತೆಯು ನಾವು ಸರಿಯಾದ ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಉಪಯೋಗವಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಘಟನೆ ಉಂಟಾಗಲು ಎಷ್ಟು ಬಗೆಯ ಅವಕಾಶಗಳಿದಿಯೋ ಗುರ್ತಿಸಲು ನಾವು **ಸಂಭವನೀಯತೆ** ಯನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವು ಮುನ್ನ, ಅದನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಶ್ರೇಣೀಕರಣ (ಗ್ರೇಡಿಂಗ್) ಮಾಡುತ್ತೇವೋ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಮುಖಾಂತರ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

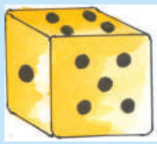
ಪಟ್ಟಿ

ಪದ	**ಅವಕಾಶ**	**ಸಂಭಾಷಣೆಯಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು**
ನಿಖರವಾಗಿ	ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ ತಪ್ಪದೇ ಸಂಭವಿಸುವ ಅವಕಾಶ	ಗಾಂಧೀ ಜಯಂತಿ ಅಕ್ಟೋಬರ್ 2 ರಂದು ಆಚರಿಸುತ್ತೇವೆ.
ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವ	ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ ನಡೆಯುವ ಅವಕಾಶ ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚು.	ವಿವೇಕ್ ಟಿ.ವಿ.ಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ಪಂದ್ಯ ನೋಡುವುದು.
ಸಮ ಸಂಭವ	ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳು ನಡೆಯಲು ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳಿರುವುದು.	ಎರಡು ತಂಡಗಳಿಗೆ ಟಾಸ್‌ಗೆಲ್ಲುವ ಅವಕಾಶ
ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಭವ	ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ ನಡೆಯುವ ಅವಕಾಶ ಕಡಿಮೆ.	ಕ್ರಿಕೇಟ್ ಪಂದ್ಯದ ದಿನ ವಿವೇಕ್ ಹೋಂವರ್ಕ್ ಮಾಡುವುದು.
ಅಸಂಭವ	ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸುವ ಅವಕಾಶ ಶೂನ್ಯ.	ಸಿದ್ದೂ ತನ್ನ ಮನೆಯ ಟಿ.ವಿ.ಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ನೋಡುವುದು.



ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ :

1. ಪಕ್ಕದ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪದಕ್ಕೆ ಮತ್ತೇ ಕೆಲವುಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಭವ, ಸಮಸಂಭವ, ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಭವಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.
   a) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಮುಖದ ಮೇಲೆ 5 ಬರುವದು.
   b) ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮೂರಿನಲ್ಲಿ ತಣ್ಣನೆ ಗಾಳಿಗಳು ಬೀಸುವುದು.
   c) ಭಾರತ ಮುಂಬರುವ ಪುಟ್‌ಬಾಲ್ ವಿಶ್ವಕಪ್ಪನ್ನು ಜಯಿಸುವುದು.
   d) ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ರಾಜ(Head) ಅಥವಾ ರಾಣಿ (Tail) ಬರುವುದು.
   e) ನೀನು ಕೊಂಡ ಲಾಟರಿ ಟಿಕೆಟ್‌ಗೆ ಬಂಪರ್ ಬಹುಮಾನ ಬರುವುದು.



14.2 ಸಂಭವನೀಯತೆ (PROBABILITY)

14.2.1 ಯಾದೃಶ್ಚಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಮತ್ತು ಫಲಿತಗಳು

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಘಟನೆ ನಡೆಯುವ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಮತ್ತು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು, ನಾವು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು, ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸ್ಪಿನ್ನರನ್ನು ತಿರುಗಿಸುವುದು ಗಳಂತಹ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಎರಡು ಫಲಿತಗಳು ಉಂಟಾಗುವ ಅವಕಾಶವಿದೆ.

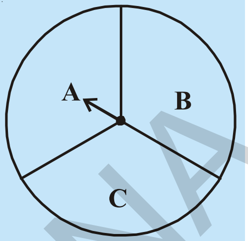
ಅವು ರಾಜ(Head) ಅಥವಾ ರಾಣಿ (Tail). ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡಕ್ಕೆ ನೀನು ನಾಯಕನೆಂದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ತಂಡಕ್ಕೆ ನಿನ್ನ ಸ್ನೇಹಿತ ನಾಯಕನಿದ್ದಾನೆಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಟದ ಮೈದಾನದಲ್ಲಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿ ನಿನ್ನ ಸ್ನೇಹಿತನನ್ನು ರಾಜ ಅಥವಾ ರಾಣಿ ಯಾವುದು ಬೇಕೆಂದು ಕೇಳುವೆ. ಆ ಫಲಿತ ನಿನ್ನ ಅಧೀನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಯೇ? ಒಂದು ವೇಳೆ ನಿನಗೆ ರಾಜ ಅಥವಾ ರಾಣಿ ಬೇಕೆಂದರೆ ನಿನಗೆ ಸಿಗುತ್ತದೆಯಾ? ಸಾಧಾರಣ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದು ಅಸಂಭವ. ಇಲ್ಲಿ ರಾಜ ಮತ್ತು ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶವಿದೆಯಾದರೂ ಯಾವುದು ಬೀಳುವುದೆಂದು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಲಾರೆವು. ಈ ಬಗೆಯ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನೇ **'ಯಾದೃಚ್ಚಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳು'** ಎನ್ನುವರು. ಇಂತಹ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯ ಫಲಿತಗಳೆಲ್ಲವೂ ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ, ಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಫಲಿತಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ಊಹಿಸಲಾರೆವು. ಯಾದೃಶ್ಚಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಫಲಿತಗಳು ಏರ್ಪಡುವ ಅವಕಾಶ ಸಮಸಂಭವ ಆಗಬಹುದು, ಆಗದಿರಬಹುದು. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಫಲಿತಗಳು ರಾಜ ಅಥವಾ ರಾಣಿ ಮಾತ್ರವೇ.

* ದಾಳ ಎಂದರೆ 1 ರಿಂದ 6 ಅಂಕೆಗಳು ಅಥವಾ ಚುಕ್ಕೆಗಳು ಮೇಲ್ಮೈಮೇಲೆ ಹೊಂದಿದ ಘನ.

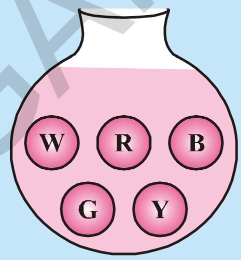
ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

1. ಒಂದು ಸ್ಕೂಟರ್‌ನ್ನು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಮಾಡಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳು ಯಾವುವು ?
2. ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಳು ಯಾವುವು ?
3. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಚಕ್ರವನ್ನು ಒಂದು ಸಾರಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳು ಯಾವುವು ?

   (ಸೂಚಕ ಎಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೋ? ಅದನ್ನೇ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.)



4. ಒಂದು ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿ 5 ಒಂದೇ ಬಗೆಯ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಇವು ಬಿಳಿ, ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ, ಬೂದು ಮತ್ತು ಹಳದಿ ಬಣ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಜಾಡಿಕಡೆ ನೋಡದಂತೆ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳು ಯಾವುವು ?



ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ

- ಮೊದಲನೇ ಆಟಗಾರನಿಗೆ, ದಾಳದ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ 6 ಬೀಳುವ ಅವಕಾಶ ಹೆಚ್ಚು.
- ಆ ನಂತರದ ಆಟಗಾರನಿಗೆ, ದಾಳದ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ 6 ಬೀಳುವ ಅವಕಾಶ ಕಡಿಮೆ.
- ಒಂದು ವೇಳೆ ಎರಡನೇ ಆಟಗಾರನಿಗೆ, ದಾಳದ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ 6 ಬಿದ್ದರೆ ಆ ನಂತರದ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸುವ 3ನೇ ಆಟಗಾರನಿಗೆ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ 6 ಬೀಳುವ ಅವಕಾಶ ಬಹಳ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ.

14.2.2 ಸಮಸಂಭವ ಫಲಿತಗಳು (Equally likely Outcomes)

ನಾವು ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ನಾಣ್ಯವನ್ನು, ದಾಳವನ್ನು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತದವುಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. (ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು ಉಂಟಾಗಲು ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳಿರುತ್ತವೆ.) ನಾವು ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನಾಧಾರಿಸಿ ಅವು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿ ರಾಜ, ರಾಣಿಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿರಿ.

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದ ಸಂಖ್ಯೆ	ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳು (ರಾಜಗಳು)	ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆ	ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳು (ರಾಣಿಗಳು)	ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆ
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	22	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	34
70	......	30	......	40
80	......	36	......	44
90	......	42	......	48
100	......	48	......	52

ಈ ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚುಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ರಾಜ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ರಾಣಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ 10, 20,....... ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿರಿ. ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆ
10		
20		
30		
40		
50		

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಏನು ನಡೆಯುತ್ತದೋ ಊಹಿಸಿ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ನಾಣ್ಯದಿಂದಲ್ಲದೇ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿ ಕೂಡ ಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದರೆ ಉಂಟಾದ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ?

ದಾಳ ಉರುಳಿಸಿದವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಪ್ರತಿ ಫಲಿತ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಉಂಟಾಗಿದಿಯೋ ತಿಳಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ (ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಕಾಣುವ ಅಂಕೆ)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

ಈ ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ದಾಳ ಉರುಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಆರು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮವಾಗಿದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿ ಫಲಿತಾಂಶವು ಉಂಟಾಗಲು ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳು ಇವೆಯೆಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

14.2.3 ಯತ್ನಗಳು ಮತ್ತು ಘಟನೆಗಳು (Trials and Events) :

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಾರಿ, ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದರೆ ಅಥವಾ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು **ಯತ್ನ** ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನೇ **ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ** ಎಂದು ಕೂಡ ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದು ಬಾರಿ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದರೆ,

ದಾಳದ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ 5 ಆಗಲಿ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳೆಷ್ಟು ?

ಎರಡು ಫಲಿತಗಳು ಸಾಧ್ಯ (ಅಂದರೆ 6)

ದಾಳದ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಬೀಳುವ ಫಲಿತಗಳು ಎಷ್ಟು? ಅವು ಯಾವುವು ?

ಫಲಿತಗಳು 3 (ಅವು 2, 4, ಮತ್ತು 6)

ಈ ರೀತಿ ಪ್ರತಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಅಥವಾ ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಯತ್ನಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ದಾಳ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ 5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕೆ ಉಂಟಾಗವುದು ಮತ್ತು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಉಂಟಾಗವವು ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಪ್ರತಿ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಫಲಿತವು 4 ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರತಿ ಫಲಿತವನ್ನು ಘಟನೆಯಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಘಟನೆಯ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪರಿಜ್ಞಾನ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಘಟನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ.

14.2.4 ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು, ಸಂಭವನೀಯತೆಗೆ ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬಾರಿ ಗಮನಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಬಾರಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಎಷ್ಟು ಫಲಿತಗಳಿರುತ್ತವೆ? ರಾಜ ಅಥವಾ ರಾಣಿ ಎಂಬ ಎರಡು ಫಲಿತಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅವು ಎರಡೂ ಸಮ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ರಾಜ ಬೀಳುವ ಅವಕಾಶವೆಷ್ಟು?

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಎರಡು ಅವಕಾಶಗಳಲ್ಲಿ ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ 1 ಅಂದರೆ $\frac{1}{2}$. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸಹ ಹೇಳಬಹುದು.

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{1}{2}$ ಇದನ್ನು ರಾಜ ಸಾಧ್ಯತೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಅಥವಾ

ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $P(H) = \frac{1}{2} = 0.5$ ಇಲ್ಲವೇ 50% ಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳು ಎಷ್ಟು? ಅವು ಯಾವುವು ?

ಆರು ಸಮ ಸಂಭವನೀಯತೆವುಳ್ಳ ಫಲಿತಗಳು ಸಾಧ್ಯ ಅವು 1, 2, 3, 4, 5, ಮತ್ತು 6.

ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಮೇಲಿನ ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ 6 ಫಲಿತಗಳಲ್ಲಿ 3 ಅನುಕೂಲ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು (ಅವು 1,3, ಅಥವಾ 5)

ಅಂದರೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{3}{6}$ ಅಥವಾ $\frac{1}{2}$

'A' ಎಂಬ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$P(A) = \frac{\text{ಒಂದು ಘಟನೆಗೆ 'A' ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳು}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾ- 1: ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು (ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುವ) ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ (a) ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳು, (b) ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, (c) ಎರಡೂ ರಾಜ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, (d) ಕನಿಷ್ಟವಾಗಿ ಒಂದು ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, (e) ರಾಜ ಬೀಳದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು (f) ಒಂದೇ ಒಂದು ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : (a) ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳು

1ನೇ ನಾಣ್ಯ	2ನೇ ನಾಣ್ಯ
ರಾಜ	ರಾಜ
ರಾಜ	ರಾಣಿ
ರಾಣಿ	ರಾಜ
ರಾಣಿ	ರಾಣಿ

b) ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4

c) ಎರಡೂ ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$$= \frac{\text{ಎರಡೂ ರಾಜ ಬೀಳುವ ಅನುಕೂಲ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{1}{4}$$

d) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{3}{4}$

[ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ರಾಜ ಅಂದರೆ ಒಂದು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರಾಜ ಎಂದರ್ಥ]

e) ರಾಜ ಇಲ್ಲದ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{4}$.

f) ಒಂದೇ ಒಂದು ರಾಜವಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳು (ಒಂದೇ ವಿಧವಾದವು) ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ
   a) ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು
   b) ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
   c) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದುರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ
      (ಒಂದು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರಾಜ (Heads))
   d) ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿ ಎರಡು ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ
      (ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರಾಜ (Heads))
   e) ರಾಜ ರಾಣಿ ಇಲ್ಲದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ

ಉದಾ- 2 : ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ (a) ಅದರ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಪ್ರತಿ ಅಂಕೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. (b) ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : (a) ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಆರು ಫಲಿತಗಳಲ್ಲಿ 4 ಅಂಕೆ ಒಂದು ಬಾರಿ ಬರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಭವನೀಯತೆ 1/6.

ಫಲಿತಗಳು	1	2	3	4	5	6
ಸಂಭವನೀಯತೆ (P)				1/6		

(b) ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮೊತ್ತ

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧಾರಣೀಕರಿಸಬಹದು.

ಒಂದು ಯಾದೃಶ್ಚಿಕ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳ **ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮೊತ್ತ ಒಂದು (1)**

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಘಟನೆ	ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳು	ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳು	ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯ ವಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{\text{ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 5 ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ	5	1	1, 2, 3, 4, 5 ಮತ್ತು 6	6	1/6
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 3ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ					
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ					
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 5ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ					
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 6ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ					
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 7ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ					
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 3ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ					
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 6 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ					

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಯಾವಾಗಲೂ 0 ಯಿಂದ 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. (0 ಮತ್ತು 1 ಸೇರಿ)

$0 \leq$ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ≤ 1

a) ಖಚಿತವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 1

b) ಅಸಂಭವನೀಯ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 0

14.2.5 ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 3-4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇರುವಂತೆ ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿಗೆ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು. (ಈ ನಾಣ್ಯ ಎಲ್ಲಾ ಗುಂಪುಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.) ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುತ್ತಾನೆ. ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಉಳಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಆ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಗುಂಪಿನ ಸಂಖ್ಯೆ	ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದ ಆವೃತ್ತಿ	ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	$\frac{\text{ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಚಿಮ್ಮಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}}$	$\frac{\text{ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಂಚಿತಆವೃತಿ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಚಿಮ್ಮಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20} = \frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40} = \frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

ಈ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ (6) ಮತ್ತು (7) ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತಿವೆ? ಈ ಬೆಲೆಗಳು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಬರುವ ರಾಜ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಇಲ್ಲವೇ ರಾಣಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಇವೆಯೆಂದು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

2. ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಸಹ 3-4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಸೇರಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ದಾಳವನ್ನು 30 ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಉಳಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು, ಆ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. (ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಗುಂಪುಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ದಾಳವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು) ಆಗ ಎಲ್ಲಾ ಉರುಳುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ದಾಳಕ್ಕೆ ಸೇರಿದವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

ದಾಳ ಉರುಳಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ	ದಾಳ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
30						

ವಿವಿಧ ಗುಂಪುಗಳಿಂದಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ದೊಡ್ಡ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿರಿ :

ಗುಂಪುಗಳು (s)	ದಾಳದ ಮುಖದ ಮೇಲೆ 1 ಬಂದ ಆವೃತ್ತಿ	ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	$\frac{\text{ದಾಳದ ಮುಖದ ಮೇಲೆ 1 ಬಂದ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ}}$
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**
1ನೆ 1ನೆ+ 2ನೆ 1ನೆ+2ನೆ +3ನೆ 1ನೆ+2ನೆ +3ನೆ+ 4ನೆ 1ನೆ+2ನೆ +3ನೆ+ 4ನೆ+5ನೆ			

ದಾಳವನ್ನು ಮತ್ತೇ ಕೆಲವು ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ (4) ನೇ ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಬೆಲೆ $\frac{1}{6}$ ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. (ಏಕೆ?) ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗ ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಫಲಿತ 1 ಬಂದಾಗ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಇದೇ ಪ್ರಯೋಗ ದಾಳದ ಮುಖದ ಮೇಲೆ 2, ದಾಳದ ಮುಖದ ಮೇಲೆ 5 ಬಂದಾಗ ಮಾಡಿ ಈ ಬೆಲೆಯು ಸಹ $\frac{1}{6}$ ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ (4) ನೇ ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 1, 2, ಅಥವಾ 5 ರಿಂದ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳಿಂದ ಹೋಲಿಸಿರಿ.

3. ಎರಡೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಯಾವ ಫಲಿತಗಳು ಬರುತ್ತವೆ? ಫಲಿತಗಳು ಎರಡು ರಾಜಗಳಾಗಲಿ ಅಥವಾ ರಾಣಿಗಳಾಗಲೀ, ಇಲ್ಲವೇ ರಾಜರಾಣಿಗಳಾಗಲೀ ಬೀಳುತ್ತವೆ. ಈ ಮೂರು ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳು ಇವೆಯೋ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಯೋಗದೊಂದಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ತರಗತಿಯನ್ನು 4 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪು ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. (ಈ ನಾಣ್ಯಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಗುಂಪುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಇರಬೇಕು) ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಎರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಚಿಮ್ಮುತ್ತಾರೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ 20 ಬಾರಿ ಪ್ರತಿ ಗುಂಪು ಚಿಮ್ಮಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳು ಚಿಮ್ಮಿದ ಆವೃತಿ	ರಾಜ ಬೀಳದ ಆವೃತ್ತಿ	ಒಂದು ರಾಜ ಬೀಳುವ ಆವೃತ್ತಿ	ಎರಡೂ ರಾಜ ಬೀಳುವ ಆವೃತ್ತಿ
20			

ಈ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟದಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಲ್ಲಾ ಗುಂಪುಗಳಿಗೂ ಸಂಚಿತ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ.

ಗುಂಪು (s)	ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳು ಚಿಮ್ಮಿದ ಆವೃತ್ತಿ	ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಮೇಲೆ ರಾಜ ಬರುವ ಆವೃತ್ತಿ	ಒಂದು ರಾಜ ಮಾತ್ರ ಬರುವ ಆವೃತ್ತಿ	ಎರಡು ರಾಜ ಬರುವ ಆವೃತ್ತಿ
1ನೆ				
1ನೆ+ 2ನೆ				
1ನೆ+2ನೆ +3ನೆ				
1ನೆ+2ನೆ +3ನೆ+ 4ನೆ				
....				

ಈ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಮೇಲೆ ರಾಜ ಬರದ ಆವೃತ್ತಿಗೆ, ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಬರುವ ಒಟ್ಟು ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ರಾಜ ಬರುವ ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಎರಡು ರಾಜ ಬರುವ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಸಹ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಮೇಲಿನ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಗುಂಪು (s)	$\frac{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಮೇಲೆ ರಾಜ ಬರದ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿ}}$	$\frac{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದು ರಾಜ ಬರುವ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿ}}$	$\frac{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಮೇಲೆ ಎರಡು ರಾಜ ಬರುವ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿ}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1 ನೇ ಗುಂಪು			
1 + 2 ನೇ ಗುಂಪು			
1 + 2 + 3 ನೇ ಗುಂಪು			
1 + 2 + 3 + 4 ನೇ ಗುಂಪು			
....			

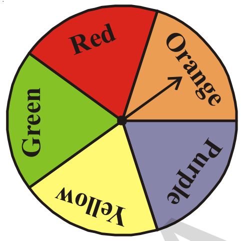
ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು (2), (3) ಮತ್ತು (4) ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 0.25, 0.5 ಮತ್ತು 0.25 ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಬರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ-3: ಒಬ್ಬ ಸ್ಪಿನ್ನರ್ (ದುಂಡಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಚಕ್ರ) 1000 ಬಾರಿ ತಿರುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಬಾರಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಸೂಚಿಕೆ ನಿಲ್ಲುವ ಪ್ರದೇಶದ ಬಣ್ಣ ಕೋಷ್ಟದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ, ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ	ಕೆಂಪು	ಕಿತ್ತಳೆ	ನೇರಳೆ	ಹಳದಿ	ಹಸಿರು
ಆವೃತ್ತಿ	185	195	210	206	204

(a) ಸ್ಪಿನ್ನರ್‌ನಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳು ಎಷ್ಟು ? ಅವು ಯಾವುವು ? (b) ಪ್ರತಿ ಬಣ್ಣ ಫಲಿತವಾಗಿ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. (c) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ, ಪ್ರತಿ ಬಣ್ಣದ ಆವೃತ್ತಿಗೆ, ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗೆ ಇರುವ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :



(ಸ್ಪಿನರ್) ನಮೂನೆ

(a) ಸ್ಪಿನ್ನರ್‌ನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ 5 ವಲಯಗಳು ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಪ್ರದೇಶಗಳಾಗಿವೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ 5 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಣ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಅವು ಕೆಂಪು, ಕಿತ್ತಳೆ, ನೇರಳೆ, ಹಳದಿ ಮತ್ತು ಹಸಿರು. ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮನಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಹೊಂದಿದ ಫಲಿತಗಳಾಗಿವೆ. ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 5.

(b) ಪ್ರತಿ ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ

$$P(\text{ಕೆಂಪು}) = \frac{\text{ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಫಲಿತ}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2.$$

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ

P(ಕಿತ್ತಳೆ), P(ನೇರಳೆ), P(ಹಳದಿ) ಮತ್ತು P(ಹಸಿರು) ಸಹ $\frac{1}{5}$ ಅಥವಾ 0.2.

(c) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ 1000 ಬಾರಿ ಸ್ಪಿನ್ನರ್ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ 185 ಬಾರಿ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಿದೆ.

$$P(\text{ಕೆಂಪು}) = \frac{\text{ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ಬಣ್ಣಗಳಿಗೆ ಕೂಡ ಈ ವಿಧವಾದ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬರೆದಾಗ ಕಿತ್ತಳೆ, ನೇರಳೆ, ಹಳದಿ, ಹಸಿರುಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 0.195, 0.210, 0.206 ಮತ್ತು 0. 204 ಬರುತ್ತದೆ.

(b) (c) ಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ (c)ಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಂಡು ಅನುಪಾತಗಳು (b) ಯಲ್ಲಿನ ಆಯಾ ಬಣ್ಣಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳಿಗೆ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿವೆ. ಅಂದರೆ ನಾವು ಕಂಡುಕೊಂಡ ಸಂಭವನೀಯತೆ, ಪ್ರಯೋಗದ ನಂತರ ಪಡೆದ ಅನುಪಾತಗಳಿಗೆ ಸರಿ ಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾ-4. ಒಂದು ಚಲನಚಿತ್ರಮಂದಿರಕ್ಕೆ ಆಗಮಿಸಿದ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಯಸ್ಸಿನ ಆಧಾರವಾಗಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಬಂಪರ್ ಬಹುಮಾನವನ್ನು ಗೆಲ್ಲಲು ಪ್ರತಿ ಪ್ರೇಕ್ಷಕನಿಗೆ ಟಿಕೇಟ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು	ಪುರುಷರು	ಸ್ತ್ರೀಯರು
2 ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	3	5
3–10 ವರ್ಷಗಳು	24	35
11–16 ವರ್ಷಗಳು	42	53
17–40 ವರ್ಷಗಳು	121	97
41–60 ವರ್ಷಗಳು	51	43
60 ವರ್ಷ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟವರು	18	13

ಒಟ್ಟು ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆ : 505

ಪರಿಹಾರ :

a) ವಯಸ್ಸು 10 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಭವನೀಯತೆ

10 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವಯಸ್ಸು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರು = 24 + 35 + 5 + 3 = 67

ಒಟ್ಟು ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆ = 505

P(ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ವಯಸ್ಸು $\leq$ 10 ವರ್ಷಗಳು) = $\frac{67}{505}$

b) ವಯಸ್ಸು 16 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬರುವ ಸ್ತ್ರೀ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

ವಯಸ್ಸು 16 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬರುವ ಸ್ತ್ರೀ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 53 + 35 + 5 = 93

P(ಸ್ತ್ರೀ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ವಯಸ್ಸು $\leq$ 16 ವರ್ಷಗಳು) = 93/505

c) ವಯಸ್ಸು 17 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿರುವ ಪುರುಷ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

ವಯಸ್ಸು 17 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿರುವ ಪುರುಷ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

= 121 + 51 + 18 = 190

P(ಪುರುಷ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ವಯಸ್ಸು $\geq$ 17 ವರ್ಷಗಳು) = $\frac{190}{505} = \frac{38}{101}$

d) ವಯಸ್ಸು 40 ವರ್ಷಗಳಿಗಿಂತ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

ವಯಸ್ಸು 40 ವರ್ಷಗಳಿಗಿಂತ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 51+43+18+ 13 = 125

P(ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ವಯಸ್ಸು > 40 ವರ್ಷಗಳು) = $\frac{125}{505} = \frac{25}{101}$

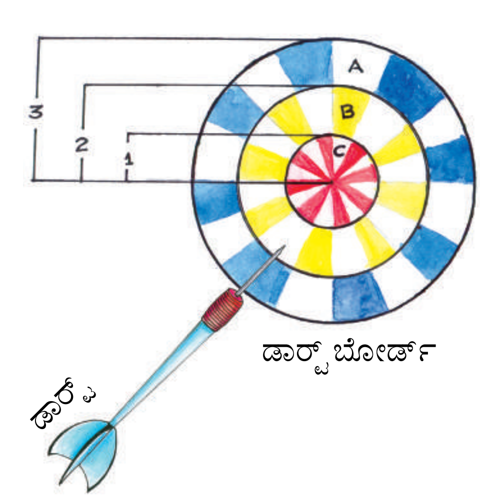
e) ಪುರಷರನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

ಪುರಷರನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ = 5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246

P(ಪುರಷರಲ್ಲದ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆ) = $\frac{246}{505}$

ಉದಾ-5 : ಮೂರು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ (ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಸೆಂ.ಮೀ., 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 1 ಸೆಂ.ಮೀ.)ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ಡಾರ್ಟ್ ಬೋರ್ಡ್ A, B ಮತ್ತು C ಎಂದು ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ಚೂಪಾದ ಒಂದು ಬರ್ಚಿಯನ್ನು ಬೋರ್ಡ್ ಮೇಲೆ ಎಸೆದಾಗ ಅದ A ನಲ್ಲಿ ತಗಲುವ ಸಂಭವಿನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? A ಎಂಬುದು (ಹೊರ ಕಂಕಣ ಪ್ರದೇಶ).



ಪರಿಹಾರ : A ನಲ್ಲಿ ತಗಲುವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವಿನೀಯತೆ

ಒಟ್ಟು ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂ.ಮೀ.)

= $\pi(3)^2$

ವೃತ್ತಾಕಾರದ (ಕಂಕಣ)ಪ್ರದೇಶ (A) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi(3)^2 - \pi(2)^2$

ಬರ್ಚಿ A ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪ್ರದೇಶ (A) ದಲ್ಲಿ ತಗುಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(A)

$$P(A) = \frac{\text{ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (A)}}{\text{ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi}$$

$$\frac{5}{9} =$$

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πr^2

ವೃತ್ತಾಕಾರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi R^2 - \pi r^2$

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಪಕ್ಕದ ಪುಟದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಚಿತ್ರದಿಂದ.

1. ವರ್ತುಲ ಪ್ರದೇಶ B ಯಲ್ಲಿ ಬರ್ಚಿ ತಗುಲುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ.
2. ವರ್ತುಲ ಪ್ರದೇಶ C ಯಲ್ಲಿ ಬರ್ಚಿ ತಗುಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡದೇ ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.

14.3. ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ :

- ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ವಾತಾವರಣ ಶಾಸ್ತ್ರ ಬರುವ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ವಾತಾವರಣ ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂದು ಊಹಿಸುವವರು.
- ವಿಮಾ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಅಪಘಾತ ಮತ್ತು ಮರಣಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವಿಮಾ ಕಂತುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತಾರೆ.
- ಚುನಾವಣಾ ಮತದಾನದ ನಂತರ **"ಎಗ್ಸಿಟ್ ಪೋಲಿಂಗ್"** (An exit poll) ನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಮತ ಚಲಾಯಿಸಿದ ಪ್ರಜೆಗಳು ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಮತ ಹಾಕಿದ್ದಾರೆಂದು ತಿಳಿದು ಆ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವವರು. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವ ಅಭ್ಯರ್ಥಿ ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುವ ಅವಕಾಶ ಇದೆಯೆಂದು ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲೇ ಊಹಿಸುವರು.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. 1 ರಿಂದ 6 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಮುಖಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿ, ಮೇಲಿನ ಮುಖದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗವಾಗಿ ಭಾವಿಸಿದರೆ

   a) ಸಂಭವನೀಯ ಫಲಿತಗಳಾವುವು ?

   b) ಅವು ಸಮಸಂಭವ ಫಲಿತಗಳೇ ? ಏಕೆ ?

   c) ದಾಳದ ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು ?

2. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 100 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಫಲಿತಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿವೆ.

   ರಾಜ : 45 ಬಾರಿ   ರಾಣಿ : 55 ಬಾರಿ ಆದರೆ

   a) ಪ್ರತಿ ಫಲಿತದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   b) ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ನಾಲ್ಕು ಬಣ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಸ್ಪಿನ್ನರ್‌ನ್ನು (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ) ಒಂದು ಸಾರಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ

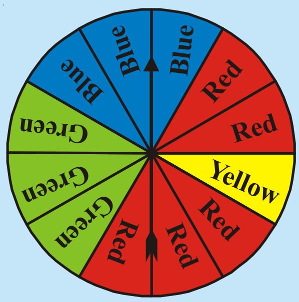
   a) ಸೂಚಕ ಯಾವ ಬಣ್ಣದ ಬಳಿ ನಿಲ್ಲುವ ಅವಕಾಶ ಹೆಚ್ಚು ?

   b) ಸೂಚಕ ನಿಲ್ಲುವ ಕನಿಷ್ಠ ಅವಕಾಶ ಹೊಂದಿದ ಬಣ್ಣ ಯಾವುದು ?

   c) ಸೂಚಕ ನಿಲ್ಲುವ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶ ಹೊಂದಿದ ಬಣ್ಣ ಯಾವುದು ?

   d) ಬಿಳಿ ಬಣ್ಣದ ಮೇಲೆ ಸೂಚಕ ನಿಲ್ಲುವ ಅವಕಾಶ ಎಷ್ಟು ?

   e) ಸೂಚಕ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಣ್ಣದ ಮೇಲೆ ನಿಖರವಾಗಿ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ ?



4. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ಐದು ಹಸಿರು ಗೋಲಿಗಳು, ಮೂರು ನೀಲಿ ಗೋಲಿಗಳು, ಎರಡು ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಹಳದಿ ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ

   a) ಎಲ್ಲಾ ಬಣ್ಣದ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಸಂಭವಗಳೇ ? ವಿವರಿಸಿರಿ.

   b) ಕೆಳಗಿನ ಬಣ್ಣದ ಗೋಲಿಗಳು ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
   i.e. , P(ಹಸಿರು), P(ನೀಲಿ), P(ಕೆಂಪು) ಮತ್ತು P(ಹಳದಿ)

   c) ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು ?

5. ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಿದಾಗ ಈ ಅಕ್ಷರ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಘಟನೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು ?

   a) ಒಂದು ಸ್ವರ   b) P ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದ ನಂತರ ಬರುವ ಅಕ್ಷರಗಳು

   c) ಸ್ವರ ಅಥವಾ ವ್ಯಂಜನ   d) ಸ್ವರವಲ್ಲದ್ದು

6. ಚೀಲದ ಮೇಲೆ 5 ಕೆ.ಜಿ. ಎಂದು ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಗೋಧಿ ಹಿಟ್ಟಿನ ನಿಜವಾದ ತೂಕಗಳು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. (ಕಿ.ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ)

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೀಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಅದು 5 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ತೂಕ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ ವಿಮಾ ಸಂಸ್ಥೆ 2000 ಜನ ಚಾಲಕರುಗಳನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ (ಯಾವ ಚಾಲಕನಿಗೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ನೀಡದೆ) ಆರಿಸಿದೆ. ಇವರ ವಯಸ್ಸಿಗೂ, ಇವರು ಮಾಡಿದ ಅಪಘಾತಗಳಿಗೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲು ಕೆಲವು ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿದೆ. ಆ ಮಾಹಿತಿ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಚಾಲಕರ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಪಘಾತಗಳು				3ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ ಚಾಲಕರು
	0	**1**	**2**	**3**	
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
50 ರ ಮೇಲೆ	360	45	35	15	9

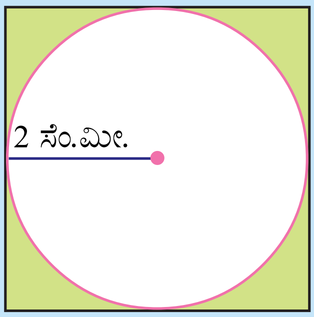
ಒಬ್ಬ ಚಾಲಕನನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ.

(i) ಚಾಲಕ 18-29 ರ ಮಧ್ಯ ವಯಸ್ಸು ಹೊಂದಿರುವ 3 ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಚಾಲಕ 30-50 ರ ನಡುವಿನ ವಯಸ್ಸು ಹೊಂದಿದ್ದು 1 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

(iii) ಚಾಲಕ ಅಪಘಾತ ಮಾಡದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ.

8. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೂಪಾದ ಬರ್ಚಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಚೌಕಾಕಾರದ ಬೋರ್ಡ್ ಕಡೆಗೆ ಎಸೆದಾಗ ಅದು ಶೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ತಗುಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಉತ್ತರವನ್ನು ಶೇಕಡಾ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.)

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

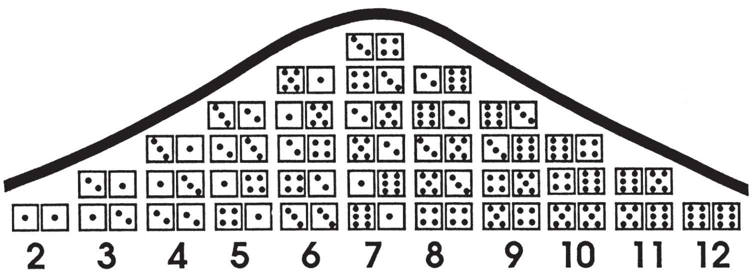
- ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಷಯ / ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಅಧಿಕ ಸಂಭವ, ಅಸಂಭವ,' ಕನಿಷ್ಟ ಸಂಭವ ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.
- ಕೆಲವು ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತ ಏರ್ಪಡಲು ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಫಲಿತವನ್ನು ಸಮಸಂಭವ ಫಲಿತಗಳೆನ್ನುವರು.
- ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಫಲಿತಅಥವಾ ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಫಲಿತಗಳು ಸೇರಿ ಘಟನೆಯೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.
- ಕೆಲವು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳಿವೆ.
- ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಬಹಳ ಸಾರಿ ನಿರ್ವಹಿಸಿದರೆ ಆ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸರಿ ಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- A ಎಂಬ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ :

$$P(A) = \frac{\text{ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

- ಖಚಿತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 1.
- ಅಸಂಭವನೀಯ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 0
- ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ 0 ಮತ್ತು 1 ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. (0 ಮತ್ತು 1 ಸೇರಿ).

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಒಂದು ಜೊತೆ ದಾಳಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಬರುವ 36 ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. 2 ರಿಂದ 12 ರವರೆಗೆ ಇರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ಇದು ಆಸಕ್ತಿಕರವಾದ ವಿನ್ಯಾಸ.



ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು 'ಗಾಸಿಯನ್ ವಕ್ರ' ಎನ್ನುವರು. 19ನೇ ಶತಮಾನದ ಪ್ರಖಾತ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ **"ಕಾರ್ಲ್ ಫ್ರೆಡ್‌ರಿಕ್ ಗಾಸ್"** *(Carl Friedrich Gauss)* ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದನು.

15 ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಗಳು

15.1 ಪರಿಚಯ

ನಾವು ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಮಾತುಗಳು, ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತಾ ಇರುತ್ತೇವೆ. ಆ ಮಾತುಗಳು ಅಥವಾವಾಕ್ಯಗಳು ಎಷ್ಟುವರೆಗೆ ನಿಜವೋ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಇರುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವು ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನಿಜವೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತೆವೆ. ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಿಟ್ಟು ಬೀಡುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವು ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನಿಜವೋ ಅಲ್ಲವೋ ನಾವು ನಿರ್ಣಯಿಸಲಾರೆವು. ಆದರೆ ಈ ವಾಕ್ಯಗಳು ನಿಜವೋ ಅಲ್ಲವೋ ನಾವು ಯಾವವಿಧವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಸಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಬ್ಯಾಂಕಿಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಹಣ ಕಟ್ಟಿ ಉಳಿದ ಹಣವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಕಟ್ಟಬೇಕೆಂಬುದು ಬ್ಯಾಂಕಿನವರು ಕೊಡುವ ಸ್ಟೇಟಮೆಂಟ್ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವರು ಹೇಳಿದ ವಿಷಯವು ಸತ್ಯವೋ ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಸಂಘಟನೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ, ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿದುಕೋಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ ಋಜುಗಳು ಅವಶ್ಯಕ. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಋಜುಗಳ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲದೇ ನಾವು ಅಂಗಿಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧಾನ ಅಂಗೀಕರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

1. ಸೂರ್ಯನು ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಉದಯಿಸುತ್ತಾನೆ.
2. $3 + 2 = 5$
3. ಅಮೆರಿಕಾ ಸಂಯುಕ್ತ ರಾಜ್ಯಗಳ ರಾಜಧಾನಿ ನ್ಯೂಯಾರ್ಕ್.
4. $4 > 8$
5. ನಿನಗೆ ಎಷ್ಟು ಜನ ಅಣ್ಣ ತಮ್ಮಂದಿರು / ಅಕ್ಕ ತಂಗಿಯರು ಇದ್ದಾರೆ?
6. ಬೆಂಗಾಲ್‌ಗಿಂತ ಗೋವಾಗೆ ಒಳ್ಳೆಯ ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ತಂಡ ಇದೆ.
7. ಆಯತವು ನಾಲ್ಕು ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.
8. $x + 2 = 7$
9. ದಯವಿಟ್ಟು ಒಳಗೆ ಬನ್ನಿ
10. ಒಂದು 6 ಮುಖಗಳಿರುವ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಎರಡು ಸಲ 6 ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ.
11. ಹೇಗಿದ್ದೀರಾ?
12. ಸೂರ್ಯನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರದೇ ಯಾವಾಗಲೂ ಹೆಚ್ಚು ವೇಗದಿಂದ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ.
13. $x < y$ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು.
14. ನೀವು ಎಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರಿ?

ಮೇಲಿನ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅಸತ್ಯ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $4>8$, ಅಮೇರಿಕಾ ಸಂಯುಕ್ತ ರಾಜ್ಯಗಳ ರಾಜಧಾನಿ ನ್ಯೂಯಾರ್ಕ್ ವಾಕ್ಯಗಳು ಅಸತ್ಯ. ಕೆಲವನ್ನು ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಜ್ಞಾನದಿಂದ ಸತ್ಯವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಅವು ಸೂರ್ಯನು ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಉದಯಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎರಡು ಸಲ 6 ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸೂರ್ಯನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರದೇ ಮುಂತಾದವುಗಳು.

ಕೆಲವು ವಾಕ್ಯಗಳು ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸತ್ಯವೆಂದು , ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಸತ್ಯವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x + 2 = 7$ ಎನ್ನುವುದು $x = 5$ ಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ಸತ್ಯ . $x < y$ ಎನ್ನುವುದು x, y ಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಬೆಲೆ ಹೊಂದಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರವೇ ಸತ್ಯ .

ಈ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಸತ್ಯಗಳು , ಕೆಲವು ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಅಸತ್ಯಗಳು. ಕೆಲವು ವಾಕ್ಯಗಳು ನಿಯಮಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು 'ಹೇಳಿಕೆಗಳು' ಎನ್ನುವರು. ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಅಥವಾ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೊಳಗೊಂಡು ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ ಎಂತಹುದಾದರೂ, ನಾವು ಆ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ಎಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಕ್ಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ.

1. ದಯವಿಟ್ಟು ಈ ನೋಟೀಸನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿರಿ.
2. ನಾನು ಹೇಳುತ್ತಿರುವ ವಿಷಯ ತಪ್ಪು.
3. ಈ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪದಗಳಿವೆ.
4. ಚಂದ್ರನ ಮೇಲೆ ನೀವು ನೀರಿನ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ವಾಕ್ಯಗಳು ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಅವುಗಳನ್ನು ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ನಿರ್ಣಯಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಮಾರ್ಗಗಳಾದರೂ ಇವೆಯಾ ?

ಮೊದಲ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ನೋಟೀಸನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ ಎಂದು ಹೇಳಿದ ವಿಷಯವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬಹುದು. ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸದೇ ಹೋದರೆ ನೀವು ಅದರ ಮೇಲೆ ಗಮನವಿಟ್ಟಂತೆ. ಎಂದರೆ ನಾವು ಈ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಸತ್ಯವೋ / ಅಸತ್ಯವೋ ಎನ್ನುವುದು ನಿರ್ಣಯಿಸಲಾರೆವು. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 2ನೇ , 3ನೇ ವಾಕ್ಯಗಳು, ತಮ್ಮ ಬಗ್ಗೆ ತಾವು ಹೇಳಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. 4ನೇ ವಾಕ್ಯ ಸತ್ಯವಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಆಗದೇ ಹೋಗಬಹುದು ಎಂಬುವ ಸಂದೇಹಾರ್ಥ (Ambiguity)ಎರಡೂಕಡೆ ಉಂಟಾಗಿದೆ.

ತನ ಬಗ್ಗೆ ತಾನು ಹೇಳಿಕೊಳ್ಳುವ ವಾಕ್ಯಗಳು ಸಂದೇಹಾರ್ಥವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುವ ವಾಕ್ಯಗಳು ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲ.

ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

ಯಾವುದಾದರೂ 5 ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅವು ಸತ್ಯವೋ / ಅಸತ್ಯವೋ ನಿರ್ಣಯಿಸಿರಿ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

15.2 ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು :

ನಾವು ಅನೇಕ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತನಾಡವವು ಕೆಲವಾದರೆ ಬರೆಯುವವು ಕೆಲವು. ಇವೆಲ್ಲವುಗಳನ್ನು ಸತ್ಯವೋ ಅಸತ್ಯವೋ ನಿರ್ಣಯಿಸಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ, ದಯವಿಟ್ಟು ಒಳಗೆ ಬನ್ನಿ, ನೀವು ಎಲ್ಲಿ ನಿವಸಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರಿ? ಇಂತಹವು ಬಹಳಷ್ಟು ಇರಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ವಾಕ್ಯಗಳೆಲ್ಲ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲ. ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಆಗುವಂತೆ ಭಾವಿಸಲಾದ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು 'ಹೇಳಿಕೆಗಳು' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಕೂಡ ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಅವು ಸಂದೇಹಾರ್ಥವಾಗಿ ಇರಬಾರದು. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

1. 3 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ
2. ಎರಡು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ
3. ಯಾವುದಾದರು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾದರೆ x; $4x + x = 5x$
4. ಭೂಮಿಗೆ ಇರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಉಪಗ್ರಹ ಚಂದ್ರ
5. ರಾಮು ಒಬ್ಬ ಒಳ್ಳೆಯ ಚಾಲಕ
6. ಭಾಸ್ಕರನು ಲೀಲಾವತಿ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾನೆ.
7. ಎಲ್ಲಾ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
8. ರಾಂಬರ್ ಒಂದು ಚೌಕ.
9. $x > 7$.
10. 4 ಮತ್ತು 5 ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

11. ಸಿಲ್ವರ್ ಫಿಷ್ ಮೀನನ್ನು ಬೆಳ್ಳಿಯಿಂದ ತಯಾರಿಸಲಾಗಿದೆ.
12. ಭೂಮಿಯನ್ನು ಆಳುವುದಕ್ಕೆ ಮನುಷ್ಯರು ಇದ್ದಾರೆ.
13. 'x' ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $2x > x$.
14. ಕ್ಯೂಬಾ ರಾಜಧಾನಿ ಹವಾನಾ.

ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು, ಯಾವುವು ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲ?

15.3 ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸತ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸರಿನೋಡುವುದು :

ಮೇಲಿನ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿರ್ವಚನೆಯಿಂದ 1ನೇ ವಾಕ್ಯ ಸತ್ಯವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ.

ಉಳಿದ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಲ್ಲವು ಯಾವುವು?

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವು ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3, 5 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವು 3 x 5=15 ಇದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಅಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ. ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಯಿಂದ ನಾವು ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ಸತ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ ಅಸತ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇಂತಹ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯುದಹಾರಣೆ ಎನ್ನುವರು (Counter Exmple).

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಮೇಲಿನ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಲ್ಲ ಹೇಳಿಕೆಗಳಾವುವು?

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಮೇಲಿನ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು "ಭೂಮಿಯನ್ನು ಆಳಲು ಮನುಷ್ಯರು ಇದ್ದಾರೆ","ರಾಜು ಒಬ್ಬ ಒಳ್ಳೆಯ ಚಾಲಕ".

ಈ ವಾಕ್ಯಗಳು ಸಂದೇಹಾರ್ಥದಿಂದ ಕೂಡಿವೆ. ಭೂಮಿಯನ್ನು ಆಳುವುದು ಎನ್ನುವುದು ಖಚಿತವಾಗಿ ಯಾವ ಪ್ರದೇಶ ಎನ್ನುವುದು ಹೇಳಲಾಗಿಲ್ಲ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಎರಡನೇ ವಾಕ್ಯದಿಂದ ಎಂತಹ ನೈಪುಣ್ಯ ಒಳ್ಳೆಯದೋ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗಿಲ್ಲ.

ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಂತೆ, ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅರ್ಥವಾಗುವಂತೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಒಂದೇ ಅರ್ಥಬರುವಂತಹ ಪದಗಳಿರಬೇಕೆಂದು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಭೂಮಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಉಪಗ್ರಹ ಚಂದ್ರ.

ಭಾಸ್ಕರನು 'ಲೀಲಾವತಿ' ಗ್ರಂಥವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ಈ ವಾಕ್ಯಗಳು ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಹೌದೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಹೇಗೆ ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದೋ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ ?

ಈ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹಾರ್ಥ ಇಲ್ಲ ಆದರೂ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಅವಸರವಿದೆ. ಇದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಮುಂದೆ ನಿರ್ವಚಿಸಿದ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಶಗಳು ಗೊತ್ತಿರಬೇಕು. ಮೊದಲನೇ ಹೇಳಿಕೆ ಸೌರ ಕುಟುಂಬ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಸಂಬಂಧ ಇದೆ ಅವಲೋಕಿಸಬೇಕು. ಎರಡನೇ ವಾಕ್ಯ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಪುಸ್ತಕ ರಚನಕಾರರಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಶಗಳು ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಗ್ರಂಥಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಇವಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ನಾವು ನೋಡುವ ಅಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸತ್ಯವೆಂದು ಹೇಳಲಾರೆವು. ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವು ಅಸತ್ಯಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಬಲ್ಲೆವು. 'x' ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $2x > x$, ಎನ್ನುವ ಹೇಳಿಕೆಯು ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯ,

ಋಣ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ($x = -1$ ಅಥವಾ $-\frac{1}{2}$ ....) ಅಸತ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವಾಕ್ಯ ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಅಸತ್ಯವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. $2x > x$, ಎನ್ನುವುದು ಎಲ್ಲಾ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತವೆಂದು ಗ್ರಹಿಸಿರುತ್ತೀರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 5 ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಆಗುವಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

i. ಪ್ರತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ $3x > x$.

ii. ಪ್ರತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ $x^2 \geq x$.

iii. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅರ್ಧ ಇರುತ್ತದೆ.

iv. ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ $90°$

v. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆದು ಒಂದು ಚೌಕ.

ಪರಿಹಾರ :

i.. $x > 0$, ಆದರೆ $3x > x$.

ii.. $x \leq 0$ ಅಥವಾ $x \geq 1$, ಆದರೆ $x^2 \geq x$.

iii. 0 ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಅ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅರ್ಧರಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ.

iv ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ $90°$

v. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು, ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಆದು ಒಂದು ಚೌಕ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 15.1

1. ಕೆಳಗಿನ ವಾಕ್ಯಗಳು ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಸಂದೇಹಾರ್ಥಕ ವಾಕ್ಯಗಳೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿರಿ .

i. ಒಂದು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ 27 ದಿನಗಳಿವೆ

ii. ಮಕರ ಸಂಕ್ರಾಂತಿ ಶುಕ್ರವಾರದ ದಿನ ಬರುತ್ತದೆ.

iii. ಹೈದರಾಬಾದ್‌ನಲ್ಲಿನ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆ $2°C$.

iv. ಜೀವರಾಶಿಗಳಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಗ್ರಹ ಭೂಮಿ.

v. ನಾಯಿಗಳು ಹಾರಬಲ್ಲವು

vi. ಫೆಬ್ರವರಿ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ 28 ದಿನಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಇರುತ್ತವೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ವಾಕ್ಯಗಳು ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸುತ್ತಾ ವಿವರಿಸಿರಿ :

i. ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $350°$

ii. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ $x^2 \geq 0$.

iii. ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

iv. ಎರಡು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ.

v. ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು , ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

3. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳಾಗುವಂತೆ ತಕ್ಕ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಬರೆಯಿರಿ.

i. ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ii. ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ.

iii. ಯಾವುದೇ x ಗೆ $3x + 1 > 4$.

iv. ಯಾವುದೇ x ಗೆ $x^3 \geq 0$.

v. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

4. “ಎಲ್ಲಾ $x > y$ ಗೆ $x^2 > y^2$ ಆಗುತ್ತದೆ.” ಎನ್ನುವ ಹೇಳಿಕೆ ಅಸತ್ಯವಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಯ್ನನು ಕೊಡಿರಿ.

15.4 ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಾರಣಗಳು :

ಮಾನವರು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕುತೂಹಲ ಉಳ್ಳವರು. ಈ ಕುತೂಹಲವೇ ಮನುಷ್ಯನನ್ನು ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿರುವ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಕುತೂಹಲವನ್ನು ನಾವು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬ ಆಸಕ್ತಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ನಾವು ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಇತರರೊಡನೆ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ಈ ವಿಧವಾದ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು, ಪರಿಶೋಧನೆಗಳಿಂದ, ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ವಿವಿಧ ಸಂಘಟನೆಗಳು ಏತಕ್ಕಾಗಿ ಹೀಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಾ ಇವೆ ಎನ್ನುವುದು ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ. ಕ್ರಮೇಣ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ

ಹೀಗಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ಹಾಗಾದರೆ ಏನು ನಡೆಯುತ್ತದೆ? ಎನ್ನುವ ಭಾವನೆಗೆ ನಾವು ಬರಬಹುದು.

ಈ ವಿಧವಾದ ಪರಿಶೋಧನೆಗಳು, ಹೊಸ ಭಾವನೆಗಳ ಆವಿಷ್ಕರಣೆ, ಅದಕ್ಕಿಂತ ಮುಂದೆ ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಚುರುಕುಗೊಳಿಸಲು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪರಿಶೋಧನೆಗಳು ನಮೂನೆಗಳು, ಪೂರ್ವ ಸಿದ್ಧಾಂತ ತಯಾರಿಸಲು ಮತ್ತು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು, ನಿರೂಪಿಸಲು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ.

- ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಪರಿಶೀಲನೆಗಳು ನಡೆಸಿ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶ ಶೇಕರಣೆ ಮಾಡಬೇಕು.
- ದತ್ತಾಂಶ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಾವು ಪರಿಶೀಲನೆಗಳ ಉತ್ತರಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.
- ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಮುಖಾಂತರ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದು.

ಇದರಿಂದ, ನಾವು

- "ಕೆಲವು ಆಲೋಚನೆಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳ ತುದಿ ರೂಪವನ್ನು ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ (hypothesis) ಎನ್ನುವರು".

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಪರಿಶೀಲನೆಗಳ ಮುಖಾಂತರ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ತಿರಸ್ಕರಿಸುತ್ತಾ ಇರುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆ ಮುಖಾಂತರ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಾವು ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ ಬದಲಾಗಿ ಊಹೆ(Conjecture) ಎನ್ನುವ ಪದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎರಡರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಹೋಲಿಕೆಗಳು, ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ.

15.4.1 ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದಕ್ಕೆ ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ :

ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯನ್ನು (Proposition) ಸಾಧಿಸಲು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಕೆಲವು ನಿಬಂಧನೆಗಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಧನಾ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಗೆ, ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಯೋಗ ಪರೀಕ್ಷಾ ಪದ್ಧತಿಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಸರಳವಾಗಿದೆ.

- ಗಣಿತವು ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿದೆ. ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಕೆಲವು ಸಾಕ್ಷ್ಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ ತಾರ್ಕಿಕ ವಿಧಾನದ ಮುಖಾಂತರ ಊಹೆ ಮಾಡುವರು.
- ವಿಜ್ಞಾನ ಅನುಗಮನ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿದೆ. ಪ್ರಯೋಗ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಥವಾ ತಿರಸ್ಕರಿಸುವುದು ನಡೆಯುತ್ತದೆ.

ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಯೋಗ ಪದ್ಧತಿಯ ಹಾಗೆ, ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ ಒಳ್ಳೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವರು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಶೆರ್ಲಾಕ ಹೋಮ್ಸ್ ಮತ್ತು ಹರ್ಕ್ಯೂಲ್ ಪೈರಾಚ್ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಪತ್ತೇದಾರರು, ಸಂಘಟನೆ ನಡೆದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಕ್ಷ್ಯಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ತಾರ್ಕಿಕವಾದ ಆಲೋಚನೆಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಯಾರು ನೇರಸ್ತರೋ ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ನೇರ ಮಾಡಿದವರು ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಹೋಗುತ್ತಾರೆ. ಆ ಆಧಾರದಿಂದ ಅವರು "ಯಾವ ಅನುಮಾನಗಳು ಬರದಂತೆ" ತಕ್ಕ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯ ಪದ "ಕಾರಣ ಕೊಡುವುದು".

15.4.2 ನಿಗಮನ ಸಾಧನೆ ವಿಧಾನ :

ಸಂದೇಹಾರ್ಥವಾಗಿರದಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳು , ಸತ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ತಾರ್ಕಿಕ ವಿಧಾನವೇ ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ. ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿನ ಫಜಲ್‌ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ನಿಮಗೆ ನಾಲ್ಕು ಕಾರ್ಡುಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಡೆಗೆ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಕ್ಷರಗಳು, ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ ಅಂಕೆಗಳಿವೆ.

A	V	8	5

ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳು ಹೇಳಲಾಗಿವೆ :

"ಕಾರ್ಡಿನ ಒಂದು ಕಡೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ, ಎರಡನೇಕಡೆ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ಸ್ವರಗಳಿವೆ". ಮೇಲಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಕನಿಷ್ಟ ಎಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು?

ಎಲ್ಲಾ ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ನೋಡಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಅವಕಾಶ ನಿಮಗೆ ಇದ್ದರೂ ಕಡಿಮೆ ಕಾರ್ಡುಗಳು ತಿರುಗಿಸುವ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ , ಒಂದು ಕಡೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ, ಎರಡನೇಕಡೆ ಸ್ವರ ಇದೆಇಷ್ಟು ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಸ್ವರಗಳಿರುವ ಪ್ರತಿ ಕಾರ್ಡಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿ ಕಾರ್ಡಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ ವ್ಯಂಜನಗಳು ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಆಗ ನಾವು ಕಾರ್ಡು 'A' ತಿರುಗಿಸಿದರೆ, ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮ ಇದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾರೆವು.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕಾರ್ಡು '8'ತಿರುಗಿಸಿದರೆ ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮ ಇದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾರೆವು.

ಆದರೆ ಕಾರ್ಡು 'V' ಮತ್ತು '5' ತಿರುಗಿಸಿದರೆ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.'V' ಹಿಂಭಾಗ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ ನಿಯಮ ಉಲ್ಲಂಘಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ '5'ರ ಹಿಂದೆ ವ್ಯಂಜನವಿದ್ದರೂ ಸಹ ನಿಯಮ ಉಲ್ಲಂಘಿಸಿ ದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಧವಾದ ತಾರ್ಕಿಕ ಆಲೋಚನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದನ್ನು 'ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ' ಎನ್ನುವರು. ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಕೆಲವು ವಾಕ್ಯಗಳು ಅಥವಾ ಅಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಫಜಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೇವಲ ಎರಡು ಕಾರ್ಡುಗಳು V ಮತ್ತು 5 ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿನದಿದ್ದರೂ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮ ತಪ್ಪು ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳು ನಿಜವೋ ಅಲ್ಲವೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಸತ್ಯವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರೆಡು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ ಕೂಡ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದಾಗ, ನಾವು ಎರಡು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕೂಡ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಹೌದೋ ಅಲ್ಲವೋ ಗುಣಿಸದಯೇ, ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ ನಂತರವೇ ಆ ವಾಕ್ಯ ನಿಜವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಅದು 6702×19992 ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಏಕೆಂದರೆ ಸರಳವಾಗಿ 56702 ಮತ್ತು 19992 ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ ಗುಣಲಬ್ದವು ಸಹ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗುತ್ತದೆ.

ನಿಗಮನ ಪದ್ದತಿ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

i. ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆ ‘0’ ಆದರೆ ಅದು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. 30 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ 30, 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. 30 ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆ 0 ಆದ್ದರಿಂದ 30, 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ii. ಗಾಯಕರಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಕವಿಗಳು , ಎಲ್ಲಾ ಸಾಹಿತ್ಯಕಾರರು ಕವಿಗಳೇ.

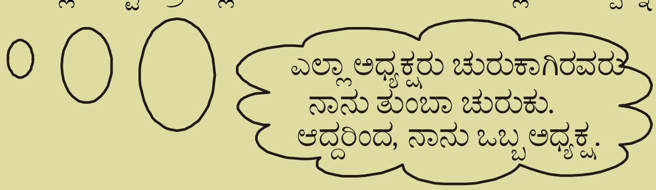
ಮೇಲಿನ ಎರಡು ವಾಕ್ಯಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಬಂದ ನಿಗಮನ ಫಲಿತಾಂಶ ತಪ್ಪು(ಏಕೆ?). ಏಕೆಂದರೆ ಸಾಹಿತ್ಯಕಾರರೆಲ್ಲರೂ ಕವಿಗಳಾಗಬಹುದು (ತಪ್ಪು) ಅಥವಾ ನಮಗೆ ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದೇ ಇರಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಮೂರು ಅವಕಾಶಗಳಿವೆ (i) ಎಲ್ಲಾ ಸಾಹಿತ್ಯಕಾರರು ಕವಿಗಳು (ii) ಕೆಲವರು ಮಾತ್ರವೇ ಕವಿಗಳು ಅಥವಾ (iii) ಯಾವ ಸಾಹಿತ್ಯಕಾರನೂ ಕವಿಯಲ್ಲ.

‘ಆದರೆ ಆಗ ’ಎನ್ನುವ ಸಂಯೋಜಕ ಮೂಲಕ ನಿಮಗನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಯೋಜಕವನ್ನು ಅನೇಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಉದಾ : ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳ ಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆದರೆ ಆಗ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°. ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಆದರೆ, ದ್ವಿಸಂಖ್ಯಾ ಮಾನದಲ್ಲಿ 101 ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಂಘಟನೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸಹ ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಹೇತುಬದ್ಧವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ನಮ್ಮ ಆಲೋಚನೆಗಳು ಒಂದೊಂದು ಸಲ ನಿಜವಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ತಪ್ಪಾಗಿ ಕೂಡ ಆಗಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಿನ್ನ ಸ್ನೇಹಿತಳು ನಿನ್ನ ಹತ್ತಿರ ಒಂದು ದಿನ ಮಾತನಾಡದೇ ಹೋದರೆ, ಅವಳಿಗೆ ನಿನ್ನ ಮೇಲೆ ಕೋಪ ಬಂದಿದೆಂದು ಭಾವಿಸುವೆ. ಆದರೆ ಅವಳು ಕೆಲಸದ ಒತ್ತಡದಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ ನಿನ್ನ ಜೊತೆ ಮಾತಾಡದೇ ಹೋಗಿರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ದೈನಂದಿನ ಸಂಘಟನೆಗಳ ಮೇಲೆ ನೀವು ಕೊಟ್ಟ ನಿರ್ಧಾರಣೆಗಳು ಸರಿಯಲ್ಲದ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಬಂದವವು ಏಕೆ? ಆಲೋಚಿಸಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 15.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಆಲೋಚಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿರಿ.
   i. ಮನುಷ್ಯರೆಲ್ಲರೂ ಮರಣ ವಿರುವವರೇ, ಜೀವನ್ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯ . ಎರಡು ವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ ಜೀವನ್ ಬಗ್ಗೆ ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?
   ii. ತೆಲುಗು ಪ್ರಜೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಭಾರತೀಯರೇ? X ಒಬ್ಬ ಭಾರತೀಯನು : X ತೆಲುಗಿನನವನು ಎಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ?
   iii. ಮಂಗಳ ಗ್ರಹ ವಾಸಿಗಳ ನಾಲಿಗೆ ಕೆಂಪಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಗುಲಾಗ್(Gulag) ಮಂಗಳ ಗ್ರಹ ನಿವಾಸಿ. ಎರಡು ವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ ಗುಲಾಗ್ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?
   iv. ಕೆಳಗಿನ ಕಾರ್ಟೂನ್‌ನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ರಾಜುವಿನ ಆಲೋಚನೆಯಲ್ಲಿರುವ ತಪ್ಪನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ?



2. ನಿನಗೆ ನಾಲ್ಕು ಕಾರ್ಡುಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಕಾರ್ಡ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಡೆ ಅಂಕೆಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ ಕೊಡಲಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ "ಒಂದು ಕಾರ್ಡಿಗೆ ಒಂದು ಕಡೆ ವ್ಯಂಜನ ಇದ್ದರೆ, ಎರಡನೇ ಕಡೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ"ಎನ್ನುವ ನಿಯಮ ಇದೆ ಯಾವ ಎರಡು ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮ ಇದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

B   3   U   8

3. ಕೆಳಗಿನ ಫಜಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ನಾವು ಅಂದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ 8 ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಸೂಚನೆಗಳು ಸತ್ಯ. ಆದರೆ ಅವು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಪಡುವುದಿಲ್ಲ.
ನಾಲ್ಕು ಸೂಚನೆಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಖಚಿತವಾಗಿ ಬೇಕು.
ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂಚನೆಗಳು.:

a. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು
b. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲ.
c. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 7ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ.
d. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.
e. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲ.
f. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 200 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು.
g. ಅದರ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅಂಕೆ ಹತ್ತನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು.
h. ಅದರ ಹತ್ತನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ನಾಲ್ಕು ಸೂಚನೆಗಳಾವುವು? ಉಪಯೋಗವಾಗದಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸೂಚನೆಗಳಾವುವು? ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಅವುಗಳ ಅನುಗುಣವಾಗಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದುಹಾಕಿರಿ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೊದಲ ಸೂಚನೆಯಿಂದ 1 ರಿಂದ 9 ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದುಹಾಕಿರಿ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಉಳಿದ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ಫಜಲ್ ಪೂರ್ತಿಯಾದನಂತರ ನಮಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗಿರುವ ಸೂಚನೆಗಳು, ಉಪಯೋಗವಾಗದೇ ಇರುವ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15.5 ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಊಹೆಗಳು(ಭಾವನೆಗಳು) ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು/ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು (THEOREMS, CONJECTURES, AXIOMS)

ಇಷ್ಟುವರೆಗೆ ನಾವು ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸತ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಊಹಾಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇದಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀವಿ. ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದರೇನು? ನಿರೂಪಿಸಲಾದ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 15.1 : ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0

ಪ್ರಮೇಯ 15.2 : ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಬ್ಧ, ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 15.3 : ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಬ್ಧ 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಊಹೆಗಳು ಎನ್ನುವವು ನಾವು ನಿಜವೆಂದು ಭಾವಿಸುವ ವಾಕ್ಯಗಳು. ಇವು ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು. ಅವಗಾಹನೆ ಪೂರ್ವಾನುಭವದ ಮೇಲೆ ಆಧಾರವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವು ಸತ್ಯಗಳಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯಗಳಾಗಬಹುದು. ಅವು ಸತ್ಯವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಲಾದಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಇವು ಗಣಿತದಲ್ಲಿರುವ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಭಾವನೆಗಳು ರೂಪೊಂದಿಸಬಡುವವು. ಇಂತಹ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ರಾಜು ಕೆಲವು ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಾ "ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ, ನಡುವೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನ ಬರುತ್ತದೆ" ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದನು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 3, 4, 5, ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $3 \times 4 \times 5 + 4 = 64$, ಇದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಘನ. ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಾಧ್ಯವೇನಾ? ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

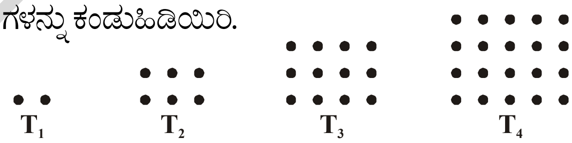
ರಫೀ – 6,7,8 ಗಳಿಂದ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದನು. 7 ಮಧ್ಯಪದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$, ಇದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಘನ. ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು n, $n + 1$, $n + 2$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸಾಧಾರಣೀಕರಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಕೆಳಗಿನ ಚುಕ್ಕೆಗಳು ಒಂದು ಅನುಕ್ರಮ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(a) ನಂತರ ಬರುವ ಮೂರು ಪದ(ಸಂಖ್ಯೆ)ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) 100ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) n^{th} ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



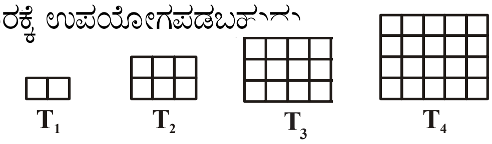
ಇಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $T_1 = 2, T_2 = 6, T_3 = 12, T_4 = 20$ ಯಾಗಿವೆ.

T_5, T_6, T_n ಪದ(ಸಂಖ್ಯೆ)ಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

T_n ನೇ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಭಾವನೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಮೇಲಿನ ವಿಷಯವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಹೀಗೆ ಬರೆದರೆ ನಮ್ಮ ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಪಡಬಹುದು.

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	6	12	20	?	.....
+4	+6	+8	+10		



ಪರಿಹಾರ :

ಆಗ, $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

$T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$ ..... T_7ನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ,

$T_{100} = 100 \times 101 = 10,100$

$T_n = n \times (n + 1) = n^2 + n$

ಈ ವಿಧವಾದ ಕಾರಣಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು ಕೆಲವು ಪರಿಶೀಲನೆಗಳು, ಅನುಕ್ರಮಗಳ ಮುಖಾಂತರ ತಿಳಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ತಿಳುವಳಿಕೆಗೆ ಬರುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು 'ಅನುಗಮನ ಪದ್ಧತಿ' (Inductive method)ಎನ್ನುವರು.

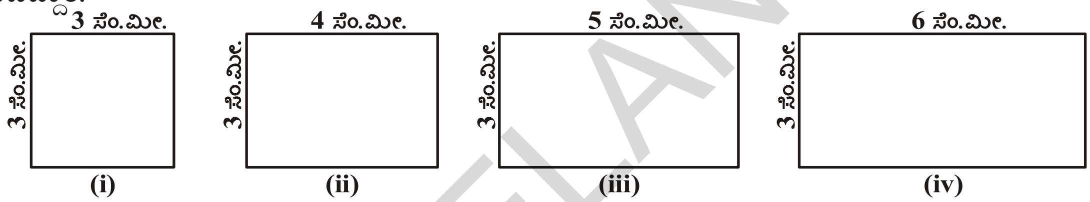
ಕೆಲವು ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಗಮನ ಪದ್ಧತಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. 1743 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಗೋಲ್ಡ್‌ಬಾಕ್ ಎನ್ನುವ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಮಾಡಿದ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$6 = 3 + 3$ $\quad$ $8 = 3 + 5$ $\quad$ $10 = 3 + 7$

$12 = 5 + 7$ $\quad$ $14 = 11 + 3$ $\quad$ $16 = 13 + 3 = 11 + 5$

4ಇಲ್ಲವೇ, 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು (ಎರಡು ಬೇರೆಬೇರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ). ಆತನ ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯ ಎಂದು ಋಜುವಾಗಿಲ್ಲ. ನೀವೇನಾದರೂ ಈ ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ ಆಗ ನೀವು ಹೆಸರುವಾಸಿ ಆಗುತ್ತೀರಾ. ಅದೊಂದು ಪ್ರಮೇಯವಾಗುತ್ತದೆ.

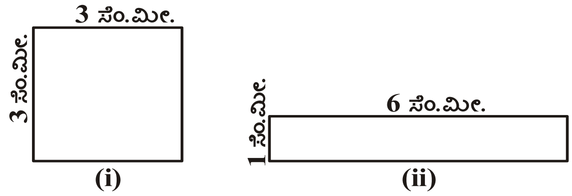
ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ನೋಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಅಸತ್ಯ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ದಾರಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಜಾಹ್ನವಿ ಮತ್ತು ಕಾರ್ತೀಕ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ಮೇಲೆ ಆ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.



	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
ಸುತ್ತಳತೆ :	12 ಸೆಂ.ಮೀ.	14 ಸೆಂ.ಮೀ.	16 ಸೆಂ.ಮೀ.	18 ಸೆಂ.ಮೀ.
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :	9 ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}	12 ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}	15 ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}	18 ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}

ಅವರು ಸುತ್ತಳತೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆಲ್ಲಾ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಎನ್ನುವ ಭಾವನೆಗೆ (ಊಹೆಗೆ) ಬಂದಿದ್ದರು. ನೀವಾದರೆ ಏನನ್ನು ಆಲೋಚಿಸುವಿರಿ? ಅವರ ಭಾವನೆ ಸತ್ಯವೇ?

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತಾ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಆಯತಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವರ ಭಾವನೆಗಳು ಅಸತ್ಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು

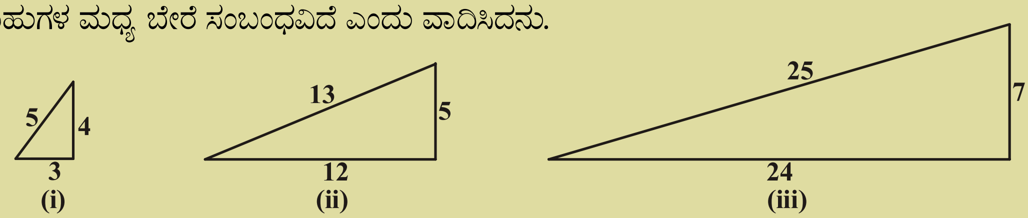


	(i)	(ii)
ಸುತ್ತಳತೆ :	12 ಸೆಂ.ಮೀ.	14 ಸೆಂ.ಮೀ.
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :	9 ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}	6 ಸೆಂ.ಮೀ.^{2}

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಳತೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆಲ್ಲ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಪೈಥಾಗರಸ್‌ನ ಪ್ರಜಾಧಾರಣೆಯಿಂದ ದೃಷ್ಟ್ಯ. ಅವರ ಅನುಯಾಯಿಗಳು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬೇರೆ ಸಂಬಂಧವಿದೆ ಎಂದು ವಾದಿಸಿದನು.



ಪಿತಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿನ ವರ್ಗ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಎನ್ನು ಭಾವನೆಯನ್ನು ಪ್ರವೇಶಪಡಿಸಿದನು.

ಮೇಲಿನ ಭಾವನೆ ನಿಜವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ 'ಯಾವಾಗಲೂ ಅಲ್ಲ', 'ಏತಕ್ಕಾಗಿ ಅಲ್ಲ' ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗುವವು. ಆದರೆ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ. ಅವು ತಮಗೆ ತಾವೇ ಸಾಟಿ ಇಲ್ಲದ ಸತ್ಯಗಳು . ಇಂತಹುಗಳನ್ನು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಎನ್ನುವರು. 3ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ದಾಂಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ (ನಾವು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತುಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ದಾಂಗಳು(ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ) ಗಳನ್ನು ಈ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇವಕ್ಕೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಾವು ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ದಾಂಗಳು ಎನ್ನು ವ ಪದವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ)

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮೊದಲನೇ ಸ್ವಿಕೃತ ಸಿದ್ದಾಂತ

"ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲೆವು"

ಮೂರನೇ ಸ್ವಿಕೃತ ಸಿದ್ದಾಂತ

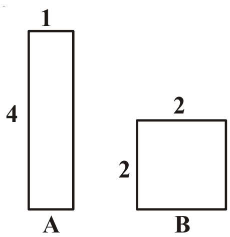
"ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು"

ಇವೆಲ್ಲಾ ನಿತ್ಯ ಸತ್ಯಗಳಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತಿವೆ ಮತ್ತು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಇವನ್ನು ಸತ್ಯಗಳಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಿದನು ಏತಕ್ಕಾಗಿ? ನಾವು ಪ್ರತಿ ಒಂದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲಾರೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ಸ್ವಿಕೃತ ಸಿದ್ದಾಂತಗಳನ್ನು ಸತ್ಯಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಇವುಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಉಳಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಎಲ್ಲಾ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸತ್ಯಗಳಾಗಿ ಏತಕ್ಕಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಲಾರೆವೆಂದು ನೀವು ಆಶ್ಚರ್ಯ ಪಡಬಹುದು. ಕೆಲವು ಭಾವನೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯಗಳಲ್ಲ. ನಾವು ನೋಡುವ ಚಿತ್ರಗಳು ಅಥವಾ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ನಮ್ಮನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಸಲ ಮೋಸ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ನಾವು ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ "ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು "ಎನ್ನುವ ಭಾವನೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯವಲ್ಲ $5 + (-5) = 0$, 0, 5 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು.

ಹಾಗೆಯೇ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಯಾವುದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೆಚ್ಚೋ ಗಮನಿಸಿರಿ.

ನೋಡುವುದಕ್ಕೆ 'B' ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಕಾಣಿಸಿದರೂ ಎರಡರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.



ನಮ್ಮ ಭಾವನೆಗಳು, ಚಿತ್ರಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕೆಲವು ಮೌಲಿಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ದಗಳಾಗಿ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ನಂತರ ಅವು ತಪ್ಪು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ನಮ್ಮ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳು ಕೆಲಸಕ್ಕೆಬಾರದೇ ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಆಗ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಜಾಗ್ರತೆಗಳೇನು?

i. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ದಗಳು ಮತ್ತು 5 ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ / ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ದಾಂತಗಳಿಂದ ನೂರಾರು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿವೆ.

ii. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಸಮಂಜಸವಾಗಿರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು :

ಒಂದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವು ಅಸತ್ಯವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು 'ಸಮಂಜಸ ಅಥವಾ ವಿರುದ್ಧತೆ' ಎನ್ನುವರು. ನಾವು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳ ಸಂಗ್ರಹ ಒಂದು ಸಮಂಜಸಗಳಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ನಾವು ಅವನ್ನು ಅಸಮಂಜಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಹೇಳಿಕೆ –1 : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಅದರ ನಂತರ ಬರುವ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮಾನವಲ್ಲ.

ಹೇಳಿಕೆ –2 : ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ('ಸೊನ್ನೆ'ಯಿಂದ ಭಾಗಕಾರ ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ, ಒಂದು ವೇಳೆ ಅದು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ಕೊಂಡರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೋ ಗಮನಿಸೋಣ)

ಹೇಳಿಕೆ – 2 ರಲ್ಲಿ $\frac{1}{0} = a$ ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ 'a' ಇದ್ದರೆ $1=0$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಹೇಳಿಕೆ –1 ರಿಂದ ಯಾವ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲ ಎನ್ನುವ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿರುದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೇಳಿಕೆ –2 ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

iii. ಒಂದು ಅಸತ್ಯ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧವು, ವಿರುದ್ಧವಾದ ಭಾವನೆಗೆ ದಾರಿಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ ಎರಡು ಸತ್ಯಗಳಾದರೆ ಅವನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಭಾವನೆಗಳೆನ್ನುವರು.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಬಾರಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ $2 \neq 1$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$x = y$ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ.

$x \times x = xy$

$x^2 = xy$

$x^2 - y^2 = xy - y^2$

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$ ಹೇಳಿಕೆ (2) ನನುಸರಿಸಿ

ಎರಡೂ ಕಡೆಗೂ $(x - y)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$x + y = y$

ಆದರೆ $x = y$

ಆಗ $x + x = x$

ಅಥವಾ $2x = x$

$2 = 1$

$2 = 1$ ಮತ್ತು $2 \neq 1$ ಎರಡು ಸತ್ಯಗಳೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆರಡನ್ನು 'ವಿರುದ್ಧ ಹೇಳಿಕೆಗಳು' ಎನ್ನುವರು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಮನ್ನು ತಯಾರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅನೇಕ ಭಾವನೆಗಳು ಆಳವಾದ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಪರಿಜ್ಞಾನ ಅವಶ್ಯಕ. ಅವನ್ನು ನೀವು ವಿರುದ್ಧ ಭಾವನೆಗಳ ಹಾದಿ ಹಿಡಿಯದಂತೆ ಜಾಗ್ರತೆವಹಿಸಬೇಕು. ಕೆಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಹೊಸ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗವಾಗಬೇಕು.

‘ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ’ ಎಂದರೆ ಪ್ರಶ್ನಿಸದೇ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವಂತಹ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಶಾಖೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು. ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳು ನಿರೂಪಣೆ ಆಗದಂತಹ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳೆಂದು (ಅವು ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ), ಪ್ರಮೇಯಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾದಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳೆಂದು ಜ್ಞಾಪಕಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 15.3

1. (i) ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಆನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   ಉದಾ , $1 \times 3 \times 5 = 15$, $3 \times 5 \times 7 = 105$, $5 \times 7 \times 9$ - .....

   (ii) ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   $2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$ ಮತ್ತು ಇತ್ಯಾದಿ.

   ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಊಹೆ ಏನು?

2. ಪಾಸ್ಕಲ್ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

   ಅಡ್ಡ ಸಾಲು -1 : $1 = 11^0$

   ಅಡ್ಡ ಸಾಲು -2 : $11 = 11^1$

   ಅಡ್ಡ ಸಾಲು -3 : $121 = 11^2$

   1
   1 1
   1 2 1
   1 3 3 1
   1 4 6 4 1

   ಅಡ್ಡಸಾಲು – 4 ಮತ್ತು 5 ಬಗ್ಗೆ ಊಹಿಸಿ ಭಾವನೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.

   ಅಡ್ಡಸಾಲು – 6 ಕ್ಕೆ ಕೂಡ ನೀವು ಊಹಿಸಿದ ಭಾವನೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತಾ ಇಲ್ಲವೋ ಗಮನಿಸಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ :

   i) $28 = 2^2 \times 7^1$ ಒಟ್ಟು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$,

   28 ಕ್ಕೆ 6 ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ i.e. 1, 2, 4, 7, 14, 28

   ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

   30 ಕ್ಕೆ 8 ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

   ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (ಸೂಚನೆ : ಪ್ರತಿ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಘಾತಾಂಕ +1 ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ)

4. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ .

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಊಹೆ ಮಾಡಿರಿ.

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

ನಿಮ್ಮ ಊಹೆ ಸರಿಯೋ ತಪ್ಪೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

5. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ 5 ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ)ಗಳನ್ನು ಶೇಕರಿಸಿರಿ.
6. $p(x) = x^2 + x + 41$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ x, $p(x)$ಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. x ನ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸರಿಹೊಂದಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. $p(x)$ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನಬಹುದೇ ? $x = 41$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

15.6 ಗಣಿತ ಸಾಧನೆ ಎಂದರೇನು ?

ಗಣಿತ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಮುಂಚೆ, ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವು ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 15,2005 ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ $15 \times 2005 = 30075$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವೆವು. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ವಿವಿಧ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು (ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ದೋಷ ಇದ್ದರೂ ಕೂಡ ಸರಿಸಮಾರಾಗಿ ಮೊತ್ತ $180°$ ಬರುತ್ತದೆ)

ಈ ಪದ್ದತಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ದೋಷಗಳೇನು? ಸರಿ ನೋಡುವುದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿರಬಹುದು? ಇವನ್ನು ನೀನು ಸತ್ಯವೆಂದುಕೊಂಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ನನ್ನ ಹೇಳಿಕೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸತ್ಯವೆಂದು ನೀನು ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಜೊತೆಗಳ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಎರಡು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಬಲ್ಲೆವೇ? ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತಗಳು. ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ನೀವು ರಚಿಸದೇ ಇರುವ ಕೆಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$ ಆಗದೇ ಇರಬಹುದು.

ಕೆಲವು ಸಲ ಸರಿ ನೋಡುವುದು ನಮ್ಮನ್ನು ತಪ್ಪು ಹಾದಿ ಹಿಡಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನೀವು ಪಾಸ್ಕಲ್ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ (ಅಭ್ಯಾಸ 15.3ನಲ್ಲಿ 2ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆ) ಹಿಂದಿನ ಸಾಧನೆಯಿಂದ ಮತ್ತು ಸರಿನೋಡುವುದರಿಂದ $11^5 = 15101051$ ಎಂದು ಕೋನೆಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ $11^5 = 161051$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಇವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳು, ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಡದ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾರ್ಗ ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಇರುವ ಬೇರೆ ವಿಧಾನವೇ 'ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧನೆ'ಕಡಿಮೆ ವಿಧಾನಗಳು, ಕೊಟ್ಟ ಅಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ, ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುವ ವಿಧಾನವೇ 'ಗಣಿತ ಸಾಧನೆಗಳು'.

ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಅಸತ್ಯವೆಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆ ಮುಖಾಂತರ ಹೇಳಬಹುದು. ಕೆಲವು ಸಾವಿರ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸತ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಅಸತ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿರಬೇಕಾದ ಹಂತಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

i. ಮುಂಚೆ ಕೊಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದೇನು? ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಅವಗಾಹನೆ ಏರ್ಪಡಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರೆಯಬೇಕು.

ii. ಸಾಧನೆ ಎನ್ನುವುದು ಹೇಳಕೆಗಳ ಕ್ರಮ, ನಾವು ಬರೆಯುವ ಪ್ರತಿ ಹೇಳಿಕೆ ಅದಕ್ಕೂ ಮುನ್ನ ನಿರೂಪಿಸಲಾದ ಸ್ವಿಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು, ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಂದ, ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಿಂದ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಹೊಂದಿದ್ದಾಗಿದೆ.

iii. ಏನನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೇಳಿದ್ದಾರೋ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸರಿಯಾದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ 4ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು 4ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ನಾವು ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧನೆಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಅವುಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ತುಂಬಾ ಮುಖ್ಯ. ಆದರೂ ನಿರೂಪಣೆ ಎನ್ನುವುದು ಯಾವಾಗಲೂ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇಧಿಸಿಕೊಂಡಂತೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಳತೆ 90^0 ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯಿಂದ ಮೋಸಹೋಗಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ತಕ್ಕ ಜಾಗ್ರತೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 15.4 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°.

ಸಾಧನೆ : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

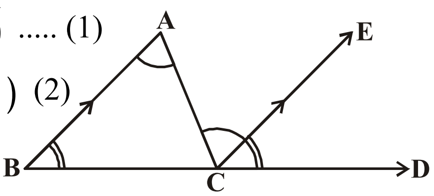
$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ರಚನೆ : CE ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ C ನಿಂದ BA ರೇಖೆಯನ್നು ಎಳೆಯಿರಿ. BC ಅನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

$CE \parallel BA$ ಮತ್ತು AC ಒಂದು ಛೇಧಕ ರೇಖೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle CAB = \angle ACE$, (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) ..... (1)

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\angle ABC = \angle DCE$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು) (2)



(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ

$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE$ ..... (3)

ಎರಡೂ ಕಡೆಗೂ $\angle BCA$ ಅನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ,

ನಮಗೆ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ ..... (4)

ಆದರೆ $\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$, (ಸರಳ ರೇಖೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು)..... (5)

ಆದ್ದರಿಂದ , $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$.

ಮೇಲಿನ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವಿವರಣೆ ಹಿಂದೆ ಇರುವ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಹಂತಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1: ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ತ್ರಿಭುಜ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಹಂತ 2 : ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ BA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ CE ಎಳೆದು, BC ಯನ್ನು Dವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಸಾಧನೆಗೆ ಇದು ತುಂಬಾ ಮುಖ್ಯವಾದ ಹಂತ.

ಹಂತ 3 : ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಪೂರ್ವ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು, ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ $\angle CAB = \angle ACE$ ಮತ್ತು $\angle ABC = \angle DCE$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಹಂತ 4 : "ಒಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸೇರಿದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ"ಎನ್ನುವ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಸ್ವಿಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಆಧಾರವಾಗಿ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ ಎಂದು ಬರೆದವು. ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ.

ಹಂತ 5 : "ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಿಗೆ , ಸಮ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮ" ಎನ್ನುವ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಸ್ವೀಕೃತ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಾವು

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$ ಎಂದು ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬಹುದು.

15.2 ಮತ್ತು 15.3ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು (ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡದೇ)ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 15.5 : ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವು ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.

ಸಾಧನೆ : x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ

ನಾವು xy ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

x, y ಗಳು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ $x = (2m - 1), y = 2n - 1$ (m, n ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆಗ, $xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$= 4mn - 2m - 2n + 1$

$= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1$

$= 2(2mn - m - n + 1) - 1$

$2mn - m - n + 1 = l$, ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕೊಂಡರೆ

$= 2l - 1, l \in N$

ಇದು ಖಚಿತವಾಗಿ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯೇ ?

ಪ್ರಮೇಯ 15.6: ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2m$, $2m + 2$ (ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ)ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $2m\ (2m + 2)$, 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. (ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀವು ಸ್ವಂತವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ)

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ತಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ? ಮತ್ತೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಖಚ್ಚಿತವಾದ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಅವರಿಗೆ ಅಂತರ್ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಊಹಿಸುವುದು ತುಂಬಾ ಮುಖ್ಯ. ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ವಿವಿಧ ಮಾರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಿ ಸರಿಯಾದ ಸಾಧನೆಗೆ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಸೃಜನಾತ್ಮಕತೆ, ಆಲೋಚನೆಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಸೇರಿ ಸಾಧನೆಗಳಾಗಿ ರೂಪಿಸಲಾಗುತ್ತವೆ.

ನಾವು ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ, ಅನುಗಮನ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೇಲೆ ಕೂಡ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಹೇಳಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದ್ದು, ಭಾರತ ದೇಶ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮೇಧಾವಿ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್‌ಗೆ ಇದ್ದ ಉನ್ನತ ಮಟ್ಟದ ಸೃಜನಾತ್ಮಕತೆಯೇ. ಅವರ ಬಹಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ನಿರ್ವಚಿಸಿದರೆ, ಆದರಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿ, ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಿ ಪ್ರಸಿದ್ಧಿ ಹೊಂದಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 15.4

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಹೇಳಿಕೆಗಳು ? ಯಾವುವು ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲ? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.
   - i. ಅವಳಿಗೆ ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಕಣ್ಣುಗಳಿವೆ.
   - ii. $x + 7 = 18$
   - iii. ಈ ದಿನ ಭಾನುವಾರವಲ್ಲ.
   - iv. 'x' ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ , $x + 0 = x$
   - v. ಈಗ ಸಮಯವೆಷ್ಟು?
2. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಅಸತ್ಯಗಳೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.
   - i. ಪ್ರತಿ ಆಯತವು ಒಂದು ಚೌಕ.
   - ii. ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x, y ಗಳಿಗೆ $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   - iii. n ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ $2n^2 + 11$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ.
   - iv. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವ ಸಮಗಳು.
   - v. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅದು ಚೌಕ.
3. "ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.
4. "ಎರಡು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.
5. "x ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ x^2ಕೂಡ ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಿಯಾದವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

i. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿ. 9 ನ್ನು ಕೂಡಿರಿ. ಅದಕ್ಕೆ ಅಂದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕೂಡಿರಿ. ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ. ನಂತರ 4ನ್ನು ಕೂಡಿರಿ. ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅಂದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ. ಫಲಿತಾಂಶ 7 ಬರುತ್ತದೆ.

ii. ಒಂದು 3- ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆದು, ಆರಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ಸಲ ಪಕ್ಕ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ (ಉದಾ 425 ಅನ್ನು 425425 ಆಗಿ ಬರೆಯಿರಿ) ಈ 6- ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (425425) 7,11 ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

1. ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಕೆಲವು ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ನಿರ್ಣಯಿಸಲಾಗುವುದು. ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯ ಸಾಧನೆಗೆ ಈ ಪದ್ದತಿಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲ.
2. ಸಾಧಾರಣ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗಿಂತ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸ್ವಲ್ಪವೈ ವಿಧ್ಯ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅವು ಸಾಕ್ಷ್ಯಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಋಜುವು ಮಾಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯುದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಅಸತ್ಯವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.
3. ತಾರ್ಕಿಕ ಆಲೋಚನೆಗಳು, ಪರಿಶೀಲನೆಗಳು, ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ ಮಾಡುವ ಊಹೆ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗೆ ದಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.
4. ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆ ಕೆಲವು ತಾರ್ಕಿಕ ಅಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಸತ್ಯವೆಂದು ಋಜುವು ಮಾಡಿದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆ ಸಾಧನೆ ಎನ್ನುವರು.
5. ಸಾಧನೆಯಿಲ್ಲದೇನೇ ಸತ್ಯಗಳಾಗಿ ಭಾವಿಸುವ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಎನ್ನುವರು.
6. ಸತ್ಯಗಳಾಗಿ ಭಾವಿಸುತ್ತಾ, ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗದ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಲ್ಪನೆ(ಊಹೆ)ಗಳೆನ್ನುವರು.
7. ಸಾಧಿಸಲಾದ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎನ್ನುವರು.
8. ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕ ಆಲೋಚನೆಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಸಾಧಿಸುವುದನ್ನು ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುವರು.
9. ಸಾಧನೆ ಎನ್ನುವುದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾದ ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸಮೂಹ.
10. ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ ತಾರ್ಕಿಕ ವಿವೇಚನೆ ಮುಖಾಂತರ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯವನ್ನು ಸೇರುವುದೇ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆ ಆಗುತ್ತದೆ.
11. ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ವಿಲೋಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಸಾಧನೆ ಬಂದಾಗ ಅಸಲು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೇ ಸರಿಯಾದುದೆಂದು ಸಾಧಿಸುವುದರ ಮುಖಾಂತರ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರೋಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುವರು.
12. ಅಸಂದಿಗ್ದ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸತ್ಯತೆಸ ನಿರ್ಧರಿಸುವುದೇ ನಿಗಮನ ತಾರ್ಕಿಕತೆ.
13. ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಸಮಾನ ಕ್ರಮಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯತೆ ಮತ್ತು ವಿನ್ಯಾಸಗಳಿಂದ ಮಾಡುವ ನಿರ್ಣಯವೇ ಅನುಗಮನ ತಾರ್ಕಿಕತೆ.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. a. $-5, \frac{22}{7}, \frac{-2013}{2014}$

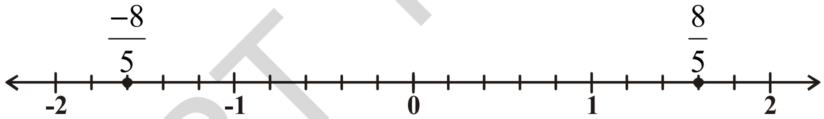
   b. $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0; p, q$ ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು - ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳೆನ್ನುವರು.

2. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) -5

   (iv) 7 (v) -3

3. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \frac{33}{32}$

4. $\frac{19}{30}, \frac{13}{20}, \frac{79}{120}$

5. 

6. I. (i) 0.242 (ii) 0.708 (iii) 0.4 (iv) 28.75

   II. (i) $0.\overline{6}$ (ii) $-0.69\overline{4}$ (iii) $3.\overline{142857}$ (iv) $1.\overline{2}$

7. (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{77}{5}$ (iii) $\frac{41}{4}$ (iv) $\frac{13}{4}$

8. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{35}{9}$ (iii) $\frac{12}{33}$ (iv) $\frac{563}{180}$

9. (i) Yes (ii) No (iii) Yes (iv) No

ಅಭ್ಯಾಸ - 1.2

1. (i) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ (iii) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ

   (iv) ಭಾಗಲಬ್ಧ (v) ಭಾಗಲಬ್ಧ (vi) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ

2. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : -1, $\frac{13}{7}$, 1.25, $21.\bar{8}$, 0

   ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π, 2.131415....., 1.1010010001.....

3. ಅನಂತ, $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 0.71727374....., 0.761661666.....   5. $\sqrt{5} = 2.236$

6. 2.645751.....   8. $\sqrt{6}$, $\sqrt{2\sqrt{6}}$

9. (i) ಸತ್ಯ   (ii) ಸತ್ಯ   (iii) ಅಸತ್ಯ $\sqrt{3}$ (iv) ಸತ್ಯ $\sqrt{9}$

   (v) ಸತ್ಯ $\sqrt{8}$ (vi) ಅಸತ್ಯ $\frac{3}{7}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 1.4

1. (i) $10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$ (ii) 20

   (iii) $10 + 2\sqrt{21}$ (iv) 4

2. (i) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ   (ii) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ   (iii) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ   (iv) ಭಾಗಲಬ್ಧ

   (v) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ   (vi) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ   (vii) ಭಾಗಲಬ್ಧ

3. (i) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ   (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ   (iii) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ   (iv) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ

   (v) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ   (vi) ಭಾಗಲಬ್ಧ

4. ಏಕೆಂದರೆ c ಅಥವಾ d ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

5. (i) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (iv) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

6. (i) $17-12\sqrt{2}$ (ii) $6-\sqrt{35}$ (iii) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ (iv) $\frac{9\sqrt{15}-3\sqrt{10}-3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{25}$

7. 0.3288

8. (i) 2   (ii) 2   (iii) 5   (iv) 64

   (v) 9   (vi) $\frac{1}{6}$ 9. -8

10. (i) a = 5, b = 2   (ii) $a = \frac{-19}{7}$, $b = \frac{5}{7}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.1

1. (i) 5   (ii) 2   (iii) 0   (iv) 6

   (v) 2   (vi) 1

2\. (i) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ (ii) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ (iii) ಅಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿವೆ.
(iv) ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತಾಂಕ ಋಣಾತ್ಮಕ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ.
(v) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ xನ ಘಾತಾಂಕ ಋಣಾತ್ಮಕ ಆದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಲ್ಲ.
(vi) ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚರಕ್ಷರಗಳು ಇವೆ

3\. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 0
(v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $-\frac{2}{3}$ (vii) 0 (viii) 0

4\. (i) ವರ್ಗ (ii) ಘನ (iii) ವರ್ಗ (iv) ರೇಖಾತ್ಮಕ
(v) ರೇಖಾತ್ಮಕ (vi) ವರ್ಗ

5\. (i) ಸತ್ಯ (ii) ಅಸತ್ಯ (iii) ಅಸತ್ಯ (iv) ಅಸತ್ಯ
(v) ಸತ್ಯ (vi) ಸತ್ಯ

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.2

1\. (i) 3 (ii) 12 (iii) 9 (iv) $\frac{3}{2}$

2\. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3
(v) 2, 0, 0

3\. (i) ಹೌದು (ii) ಅಲ್ಲ (iii) ಹೌದು (iv) ಅಲ್ಲ, ಹೌದು
(v) ಹೌದು (vi) ಹೌದು (vii) ಹೌದು, ಅಲ್ಲ (viii) ಹೌದು ,ಅಲ್ಲ

4\. (i) -2 (ii) 2 (iii) $\frac{-3}{2}$ (iv) $\frac{3}{2}$
(iv) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-q}{p}$

5\. $a = \frac{-2}{7}$ 6. $a = 1, b = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.3

1\. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1
(iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $\frac{-27}{8}$

2\. $5p$ 3. ಶೇಷ 5 ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪವರ್ತನ ಅಲ್ಲ 4. -3 5. $\frac{-13}{3}$

6\. $\frac{-13}{3}$ 7. 8 8. $\frac{21}{8}$ 9. $a = -7, b = -12$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.4

1. (i) ಹೌದು (ii) ಅಲ್ಲ (iii) ಅಲ್ಲ (iv) ಅಲ್ಲ
2. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಹೌದು (iv) ಹೌದು
   (v) ಹೌದು
7. (i) $(x-1)(x+1)(x-2)$ (ii) $(x+1)^2(x-5)$
   (iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y+1)(y+1)(y-1)$
9. a = 3 10. $(y-2)(y+3)$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.5

1. (i) $x^2 + 7x + 10$ (ii) $x^2 - 10x + 25$
   (iii) $9x^2 - 4$ (iv) $x^4 - \frac{1}{x^4}$ (v) $1 + 2x + x^2$
2. (i) 9999 (ii) 998001 (iii) $\frac{9999}{4} = 2499\frac{3}{4}$
   (iv) 251001 (v) 899.75
3. (i) $(4x+3y)^2$ (ii) $(2y-1)^2$ (iii) $\left(2x+\frac{y}{5}\right)\left(2x-\frac{y}{5}\right)$
   (iv) $2(3a+5)(3a-5)$ (v) $(x+3)(x+2)$
   (vi) $3(P-6)(P-2)$
4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$
   (ii) $8a3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
   (iii) $4a^2 + 25b^2 + 9c^2 - 20ab - 30bc + 12ac$
   (iv) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{ab}{4} - b + \frac{a}{2}$
   (v) $p^3 + 3p^2 + 3p + 1$ (vi) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$
5. (i) $(-5x + 4y + 2z)^2$ (ii) $(3a + 2b - 4c)^2$
6. 29
7. (i) 970299 (ii) 1,0,61,208 (iii) 99,40,11992 (iv) 100,30,03,001
8. (i) $(2a+b)^3$ (ii) $(2a-b)^3$ (iii) $(1-4a)^3$ (iv) $\left(2p+\frac{1}{5}\right)^3$
10. (i) $(3a+4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$ (ii) $(7y-10)(49y^2 + 70y + 100)$
11. $(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

14. (i) -630 (ii) 16380 (iii) $\frac{-5}{12}$ (iv) -0.018

15. (i) $(2a + 3)(2a - 1)$ (ii) $(5a - 3)(5a - 4)$

16. (i) $3x(x - 2)(x + 2)$ (ii) $4(3y + 5)(y - 1)$

ಅಭ್ಯಾಸ - 3.1

1. (i) 3 (ii) 13 (iii) ಆರು (iv) 180°
   (v) ಬಿಂದು. ಮೇಲ್ಮೈ, ರೇಖೆ
2. a) ಅಸತ್ಯ b) ಸತ್ಯ c) ಸತ್ಯ d) ಸತ್ಯ
   e) ಸತ್ಯ 7. ಅನಂತ 8. 180° ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕಡೆ ಇರುವ ರೇಖೆಗಳು ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುವವು
9. $\angle 1 = \angle 2$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.1

2. (i) ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನ (ii) ಲಂಬ ಕೋನ (iii) ಲಘು ಕೋನ
3. (i) ಅಸತ್ಯ (ii) ಸತ್ಯ (iii) ಅಸತ್ಯ (iv) ಅಸತ್ಯ
   (v) ಸತ್ಯ (vi) ಸತ್ಯ (vii) ಅಸತ್ಯ (viii) ಸತ್ಯ
4. (i) 90° (ii) 180° (iii) 210°

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.2

1. $x = 36°$ $y = 54°$ $z = 90°$
2. (i) $x = 23°$ (ii) $x = 59°$ (iii) $x = 20°$ (iv) $x = 8°$
3. $\angle BOE = 30°$; $\angle COE = 250°$ ನ ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನ
4. $\angle C = 126°$
8. $\angle XYQ = 122°$ $\angle QYP = 302°$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.3

2. $x = 126°$
3. $\angle AGE = 126°$ $\angle GEF = 36°$ $\angle FGE = 54°$
4. $\angle QRS = 60°$ 5. $\angle ACB = \angle z = \angle x + \angle y$
6. $a = 40°$; $b = 100°$
7. (i) $\angle 3, \angle 5, \angle 7, \angle 9, \angle 11, \angle 13, \angle 15$
   (ii) $\angle 4, \angle 6, \angle 8, \angle 10, \angle 12, \angle 14, \angle 16$

8. $x = 60°$ $y = 59°$
9. $x = 40°$ $y = 40°$
10. $x = 60°$ $y = 18°$
11. $x = 63°$ $y = 11°$
13. $x = 50°$ $y = 77°$
15. (i) $x = 36°$; $y = 108°$ (ii) $x = 35°$ (iii) $x = 29°$
16. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 80°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 100°$
17. $x = 20°$ $y = 60°$ $z = 120°$
18. $x = 55°$ $y = 35°$ $z = 125°$
19. (i) $x = 140°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 250°$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.4

1. (i) $x = 110°$ (ii) $z = 130°$ (iii) $y = 80°$
2. $\angle 1 = 60°$ 3. $x = 35°, y = 51°$ 5. $x = 50°$ $y = 20°$
6. $x = 70°$ $y = 40°$ 7. $x = 30°$ $y = 75°$
8. $\angle PRQ = 65°$ 9. $\angle OZY = 32°$; $\angle YOZ = 121°$
10. $\angle DCE = 92°$ 11. $\angle SQT = 60°$ 12. $z = 60°$
13. $x = 37°$ $y = 53°$ 14. $\angle A = 50°$; $\angle B = 75°$
15. (i) 78° (ii) $\angle ADE = 67°$ (iii) $\angle CED = 78°$
16. (i) $\angle ABC = 72°$ (ii) $\angle ACB = 72°$
(iii) $\angle DAB = 27°$ (iv) $\angle EAC = 32°$
17. $x = 96°$ $y = 120°$

ಅಭ್ಯಾಸ - 5.1

1. (i) ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕ್ (ii) Mr. 'J' ಮನೆ
(iii) 2ನೇ ಬೀಧಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೋದರೆ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರನೇ ಮನೆ.
(iv) 4ನೇ ಬೀಧಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೋದರೆ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಒಂದನೇ ಮನೆ.
(v) 4ನೇ ಬೀಧಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೋದರೆ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಮೂರನೇ ಮನೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3
(v) Y-ಅಕ್ಷ (vi) X-ಅಕ್ಷ (vii) X-ಅಕ್ಷ (viii) Y-ಅಕ್ಷ

2. (i) ಪಾದಸೂಚಕ : 4 ಲಂಬಸೂಚಕ : -8 (ii) ಪಾದಸೂಚಕ : -5 ಲಂಬಸೂಚಕ : 3 (iii) ಪಾದಸೂಚಕ : 0 ಲಂಬಸೂಚಕ : 0 (iv) ಪಾದಸೂಚಕ : 5 ಲಂಬಸೂಚಕ : 0
   (v) ಪಾದಸೂಚಕ : 0 ಲಂಬಸೂಚಕ : -8
3. (ii) (0, 13) : Y-ಅಕ್ಷ (iv) (-2, 0) : X-ಅಕ್ಷ
   (v) (0, -8) : Y-ಅಕ್ಷ (vi) (7, 0) : X-ಅಕ್ಷ
   (vii) (0, 0) : ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.
4. (i) -7 (ii) 7 (iii) R (iv) P
   (v) 4 (vi) -3
5. (i) ಅಸತ್ಯ (ii) ಸತ್ಯ (iii) ಸತ್ಯ (iv) ಅಸತ್ಯ
   (v) ಅಸತ್ಯ (vi) ಸತ್ಯ

ಅಭ್ಯಾಸ - 5.3

2. (5, -8), Q_4 ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು (-8, 5) , Q_2 ನಲ್ಲಿ ಇದೆ.
3. ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 1 ಯೂನಿಟ್ ದೂರದಲ್ಲಿವೆ.
4. ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 4 ಯೂನಿಟ್ ದೂರದಲ್ಲಿವೆ.
5. 12 ಚ. ಸೆಂ. ಮೀ

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

1. (i) $a = 8$ $b = 5$ $c = -3$
   (ii) $a = 28$ $b = -35$ $c = 7$
   (iii) $a = 93$ $b = 15$ $c = -12$
   (iv) $a = 2$ $b = 5$ $c = 0$
   (v) $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{4}$ $c = -7$
   (vi) $a = \frac{3}{2}$ $b = 1$ $c = 0$
   (vii) $a = 3$ $b = 5$ $c = -12$
2. (i) $a = 2$ $b = 0$ $c = -5$
   (ii) $a = 0$ $b = 1$ $c = -2$
   (iii) $a = 0$ $b = \frac{1}{7}$ $c = -3$
   (iv) $a = 1$ $b = 0$ $c = \frac{14}{13}$
3. (i) $x + y = 34$ (ii) $2x - y + 10 = 0$

(iii) $x - 2y - 10 = 0$ (iv) $2x + 15y - 100 = 0$

(v) $x + y - 200 = 0$ (vi) $x + y - 11 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

2. (i) $(0, -34); (\frac{17}{4}, 0)$ (ii) $(0, 3) ; (-7, 0)$

   (iii) $(0, \frac{3}{2}) ; (\frac{-3}{5}, 0)$

3. (i) ಸಾಧನೆ ಅಲ್ಲ (ii) ಸಾಧನೆ (iii) ಸಾಧನೆ

   (iv) ಸಾಧನೆ ಅಲ್ಲ (v) ಸಾಧನೆ ಅಲ್ಲ

4. k = 7 5. $\alpha = \frac{8}{5}$ 6. 3

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.3

2. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು
3. 3
4. (i) 6 (ii) -5
5. (i) $(\frac{3}{2}, 3)$ (ii) (-3, 6)
6. (i) (2, 0) : (0, -4) (ii) (-8, 0) ; (0, 2)

   (iii) (-2, 0) ; (0, -3)
7. $x + y = 1000$ 8. $x + y = 5000$ 9. $f = 6a$ 10. 39.2
11. $5x = 3y$; 2000 ; 480 (ಮತ ವಿನಿಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡ ಮತದಾರರು = x, ಒಟ್ಟು ಮತದಾರರು = y)
12. x - y = 25; 50; 15 (ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು = x, ರೂಪಳ ವಯಸ್ಸು = y)
13. $y = 8x + 7$; 6 ಕಿ. ಮೀ ; ₹ 63 14. $x + 4y = 27$; 5, 11
15. $y = 10x + 30$; 60; 90; 5 ಗಂ. (ಒಟ್ಟು ಗಂಟೆಗಳು = x ; ಪಾರ್ಕಿಂಗ್ ಖರ್ಚುಗಳು = y)
16. d = 60 t (d = ದೂರ, t = ಕಾಲ); 90 ಕಿ.ಮೀ.; 120 ಕಿ.ಮೀ.; 210 ಕಿ.ಮೀ.
17. $y = 8x$; $\frac{3}{2}$ ಅಥವಾ $1\frac{1}{2}$; 12
18. $y = \frac{5}{7}x$ (ಮಿಶ್ರಮ ಪ್ರಮಾಣ = x; ಹಾಲಿನ ಪ್ರಮಾಣ = y) ; 20
19. (ii) 86° F (iii) 35° C (iv) -40

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.4

4. (i) $y = -3$ (ii) $y = 4$ (iii) $y = -5$ (iv) $y = 4$
5. (i) $x = -4$ (ii) $x = 2$ (iii) $x = 3$ (iv) $x = -4$

ಅಭ್ಯಾಸ - 7.4

6. 7
7. ಅಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ - 8.1

1. (i) ಸತ್ಯ (ii) ಸತ್ಯ (iii) ಅಸತ್ಯ (iv) ಸತ್ಯ
   (v) ಅಸತ್ಯ (vi) ಅಸತ್ಯ
2. (a) ಹೌದು, ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ (b) ಅಲ್ಲ, ಹೌದು, ಹೌದು, ಹೌದು,ಹೌದು
   (c) ಅಲ್ಲ, ಹೌದು, ಹೌದು, ಹೌದು,ಹೌದು (d) ಅಲ್ಲ, ಹೌದು, ಹೌದು, ಹೌದು,ಹೌದು
   (e) ಅಲ್ಲ, ಹೌದು, ಹೌದು, ಹೌದು,ಹೌದು (f) ಅಲ್ಲ, ಹೌದು, ಹೌದು, ಹೌದು,ಹೌದು
   (g) ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ, ಹೌದು,ಹೌದು (h) ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ, ಹೌದು, ಅಲ್ಲ, ಹೌದು
   (i) ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ, ಹೌದು,ಹೌದು (j) ಅಲ್ಲ, ಅಲ್ಲ, ಹೌದು, ಅಲ್ಲ, ಹೌದು.
4. ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು = 36°, 72°, 108°, 144°

ಅಭ್ಯಾಸ - 8.3

1. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು = 73°, 107°, 73°, 107°
2. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು= 52°, 128°, 52°, 128°

ಅಭ್ಯಾಸ - 8.4

1. BC = 8 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.1

1.

ಅಂಕಗಳು	5	6	7	8	9	10
ಆವೃತ್ತಿ (f)	5	6	8	12	9	5

2.

ರಕ್ತದ ಗುಂಪು	A	B	AB	O
ಆವೃತ್ತಿ (f)	10	9	2	15

ಅತಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ರಕ್ತದ ಗುಂಪು = O ; ಅತಿ ವಿರಳವಾದ ರಕ್ತದ ಗುಂಪು = AB

3.

ಮುಖಗಳ (Heads) ಸಂಖ್ಯೆ	0	1	2	3
ಆವೃತ್ತಿ (*f*)	3	10	10	7

4.

ಆಯ್ಕೆಗಳು	A	B	C
ಆವೃತ್ತಿ (*f*)	19	36	10

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಗಳು = 65

ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಜನರ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು = B (ಬಹಿರಂಗ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ನಿಷೇಧ)

5.

ವಾಹನ	ಕಾರು	ಬೈಕುಗಳು	ಆಟೋಗಳು	ಸೈಕಲ್‌ಗಳು
ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (*f*)	25	45	30	40

6. ಪ್ರಮಾಣ : X-ಅಕ್ಷ = 1 ಸೆಂ.ಮೀ. = 1ವರ್ಗಾಂತರ

Y- ಅಕ್ಷ = 1 ಸೆಂ.ಮೀ. = 10 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

ತರಗತಿ	I	II	III	IV	V	VI
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (*f*)	40	55	65	50	30	15

7.

ಅಂಕಗಳು (ವರ್ಗಾಂತರ)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (*f*)	1	4	3	7	7	7	1	0

8.

ವಿದ್ಯುತ್ ಬಿಲ್ಲು (₹ಗಳಲ್ಲಿ) (ವರ್ಗಾಂತರ)	ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (*f*)
150 - 225	4
225 - 300	3
300 - 375	7
375 - 450	7
450 - 525	0
525 - 600	1
600 - 675	1
675 - 750	2

9.

ಜೀವಿತ ಕಾಲ(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) (ವರ್ಗಾಂತರ)	2-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.0
ಬ್ಯಾಟರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	6	14	11	4	3

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.2

1. $\bar{x} = 85$ 2. $\bar{x} = 1.71$ 3. K = 10
4. $\bar{x} = 17.7$
5. (i) ₹ 359, ₹ 413, ₹ 195, ₹ 228, ₹ 200, ₹ 837
   (ii) ₹444 (ಪ್ರತಿ ಪಾಠಶಾಲೆ ಉಳಿತಾಯ ಮಡಿದ್ದು)
6. ಬಾಲಕನ ಎತ್ತರ = 152 ಸೆಂ.ಮೀ. ; ಬಾಲಕಿಯ ಎತ್ತರ = 152 ಸೆಂ.ಮೀ.
7. $\bar{x}$ = 11.18 ; ಬಹುಳಕ = 5 ; ಮಧ್ಯಾಂಕ = 10
8. $\bar{x}$ = 80 ; ಮಧ್ಯಾಂಕ = 75 ; ಬಹುಳಕ = 50
9. 37 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. 10. ₹ 11.25, ಮಧ್ಯಾಂಕ = ₹ 10; ಬಹುಳಕ = ₹ 10
11. 1ನೇ = 2 ; 2ನೇ = 6 ; 3ನೇ = 19 ; 4ನೇ = 33

ಅಭ್ಯಾಸ - 10.1

1. (i) 96 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} (ii) 140 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} ; 236 ಸೆಂ.ಮೀ^{2}
2. 3375 ಘ. ಮೀ 3. 330 ಘ. ಮೀ 4. 8 ಮೀ.
5. (i) ಅಸಲು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ 4 ಪಟ್ಟು (ii) ಅಸಲು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ 9 ಪಟ್ಟು (iii) n^2 ಬಾರಿ
6. 60 ಸೆಂ.ಮೀ^{3} 7. 16 ಮೀ^{3} 8. 3750 ಲೀಟರ್‌ಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ - 10.2

1. 6.90 ಮೀ^{2} 2. 176 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} ; 253 ಸೆಂ.ಮೀ^{2}
3. r = 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ. 4. h = 25 ಮೀ.
5. (i) 968 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} (ii) 1064.8 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} (iii) 2032.8 ಸೆಂ.ಮೀ^{2}
6. ₹338. 80 7. 1584 ಮೀ^{2}
8. (i) 110 ಮೀ^{2} (ii) ₹4400
9. (i) 59.4ಮೀ^{2} (ii) 64.8 ಮೀ^{2} 10. 517.44 ಲೀಟರ್‌ಗಳು 11. h = 20 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 10.3

1. h = 6ಸೆಂ.ಮೀ. 2. h = 9 ಸೆಂ.ಮೀ.
3. (i) 7 ಸೆಂ.ಮೀ. (ii) 462 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} 4. 1232 ಸೆಂ.ಮೀ^{3}
5. 1018.3 ಸೆಂ.ಮೀ^{3} 6. ₹7920 7. $3394\frac{2}{7}$ ಸೆಂ.ಮೀ^{3}
8. 241.89 ಮೀ^{2} (ಸರಿಸುಮಾರು) 9. 63 ಮೀ 10. 6375.8ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ
11. 24.7 ನಿಮುಷಗಳು 12. 60 ಗ. ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ

ಅಭ್ಯಾಸ - 10.4

1. 154 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} ; 179.67 ಸೆಂ.ಮೀ^{3} 2. 3054.86 ಸೆಂ.ಮೀ^{3}

3. 616 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} 4. 6930 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} 5. 4 : 9 ; 8 : 27

6. 942 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} 7. 1 : 4 8. 441 : 4000 9. 55 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಇಲ್ಲವೆ 0.055 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.

10. 5 ಸೆಂ.ಮೀ. 11. 0.303 ಲೀ 12. ಬಾಟಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 9

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.1

1. 19.5 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} 2. 114 ಸೆಂ.ಮೀ^{2} 3. 36 ಸೆಂ.ಮೀ^{2}

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.2

1. 8.57 ಸೆಂ.ಮೀ 2. 6.67 ಸೆಂ.ಮೀ

ಅಭ್ಯಾಸ - 12.1

1. (i) ತ್ರಿಜ್ಯ (ii) ವ್ಯಾಸ (iii) ಲಘು ಕಂಸ
   (iv) ಜ್ಯಾ (v) ಅಧಿಕ ಕಂಸ (vi) ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ
   (vii) ಜ್ಯಾ (viii) ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡ
2. (i) ಸತ್ಯ (ii) ಸತ್ಯ (iii) ಸತ್ಯ (iv) ಅಸತ್ಯ
   (v) ಅಸತ್ಯ (vi) ಸತ್ಯ (vii) ಸತ್ಯ

ಅಭ್ಯಾಸ - 12.2

1. 90° 2. 48°, 84° 3. ಹೌದು

ಅಭ್ಯಾಸ - 12.4

1. 130° 2. 40° 3. 60°, 120°

5. 5 ಸೆಂ.ಮೀ. 6. 6 ಸೆಂ.ಮೀ. 7. 4 ಸೆಂ.ಮೀ. 9. 70°, 55°, 55°

ಅಭ್ಯಾಸ 12.5

1. (i) $x° = 75°$; $y° = 75°$ (ii) $x° = 70°$; $y° = 95°$
   (ii) $x° = 90°$; $y° = 40°$
4. (a), (b), (c), (e), (f) = ಸಾಧ್ಯ ; (d) = ಅಸಾಧ್ಯ

ಅಭ್ಯಾಸ - 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5 ಮತ್ತು 6 (b) ಹೌದು, $P(E) = \frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$

2. (a) $\frac{9}{20}$; $\frac{11}{20}$ (b) 1

3. (a) ಕೆಂಪು (b) ಹಳದಿ (c) ನೀಲಿ, ಹಸಿರು ಮತ್ತು ಕೆಂಪು (d) ಅವಕಾಶವಿಲ್ಲ
   (e) ಹೇಳಲಾರೆವು (ಇದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ)

4. (a) ಅಲ್ಲ.
   (b) P (ಹಸಿರು) $= \frac{5}{12}$; P (ನೀಲಿ) $= \frac{1}{4}$; P (ಕೆಂಪು) $= \frac{1}{6}$; P (ಹಳದಿ) $= \frac{1}{6}$
   (c) 1

5. (a) $P(E) = \frac{5}{26}$ (b) $P(E) = \frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

6. $P(E) = \frac{7}{11}$

7. (i) $P = \frac{61}{2000}$ (ii) $P = \frac{9}{80}$ (iii) $P = \frac{261}{400}$

8. 21.5%

ಅಭ್ಯಾಸ - 15.1

1. (i) ಯಾವಾಗಲೂ ಅಸತ್ಯ. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಕನಿಷ್ಟ 28 ದಿನಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಸಾಧರಣವಾಗಿ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ 30 ಮತ್ತು 31 ದಿನಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.
   (ii) ಸಂದಿಗ್ಧ. ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಮಕರ ಸಂಕ್ರಾಂತಿ ಶುಕ್ರವಾರದಿನ ಬರಬಹುದು ಇಲ್ಲವೇ ಬರದೇ ಇರಬಹುದು.
   (iii) ಸಂದಿಗ್ಧ. ಶೀತಾಕಾಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ದಿನ ಹೈದರಾಬಾದ್‌ನ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆ 2°C ಆಗಬಹುದು.
   (iv) ಸತ್ಯ. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಪ್ರಕಾರ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಭವಿಷ್ಯತ್‌ನಲ್ಲಿ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಇತರೆ ಗ್ರಹಗಳ ಮೇಲೆ ಜೀವ ಇರುವಂತೆ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.
   (v) ಯಾವಾಗಲೂ ಅಸತ್ಯ. ನಾಯಿಗಳು ಹಾರುವುದಿಲ್ಲ.
   (vi) ಸಂದಿಗ್ಧ. ಲೀಪು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಫೆಬ್ರವರಿ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ 29 ದಿನಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

2. (i) ಅಸತ್ಯ, ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360°.
   (ii) ಸತ್ಯ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆ.
   (iii) ಸತ್ಯ, ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗುತ್ತದೆ.
   (iv) ಸತ್ಯ,
   (v) ಅಲ್ಲ. (ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾರೆವು. ಉದಾ: 9 = 4+5 (ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾ: 9 = 1 + 3 + 5)

3. (i) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾತ್ರವೇ

(ii) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ.

[ಉದಾ: $2\times\frac{5}{2} = 5$ (ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ)]

(iii) ಯಾವುದೇ $x > 1, 3x + 1 > 4$ (iv) ಯಾವುದೇ $x \geq 0, x^3 \geq 0$

(v) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯರೇಖೆ ಸಹ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

4. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $x \quad y$

$-2 > -3$

$x^2 = -2 \times -2 = 4$ (ಇಲ್ಲಿ $x^2 < y^2$)

$y^2 = -3 \times -3 = 9$

ಅಭ್ಯಾಸ 15.2

1. (i) ಜೀವನ್ ಮರಣಿಸುತ್ತಾನೆ.

(ii) ಅಲ್ಲ, X ಎಂಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಮರಾಠೀ, ಗುಜರಾತಿ, ಪಂಜಾಬಿ ಇಲ್ಲವೇ ಮತ್ತೆ ಯಾವುದಾದರೂ ರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸೇರಬಹುದು.

(iii) ಗಿಳಿಗೆ ಕೆಂಪು ನಾಲಿಗೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(iv) ಚುರುಕಾದವರೇ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಕ್ಷರು ಮಾತ್ರವೇ ಚುರಕಾದವರೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಹ ಚುರುಕಾದವರು ಆಗಬಹುದು.

2. B ನಿಂದ 8 ಕಡೆಗೆ ಬದಲಾಯಿಸ ಬೇಕು. 8 ಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆಗೆ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಬಂದರೆ ನಿಯಮ ತಪ್ಪು ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ 8 ಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆಗೆ ವ್ಯಂಜನಗಳು ಬಂದರೆ ಆಗ ಸಹ ನಿಯಮ ತಪ್ಪೇ.

3. 35 ಉತ್ತರ ಆಗುತ್ತದೆ.

- 'a' ಹೇಳಿಕೆ ಸಹಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕಂದರೆ ಉಳಿದ ಸೂಚನೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಅಂಕೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆವಶ್ಯಕ.
- 'b' ಹೇಳಿಕೆ ಸಹಯ ವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕಂದರೆ ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಿಂತ ಇದು ದೊಡ್ಡದು ಆಗಬೇಕು. ಮತ್ತು 7 ,10 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ 70 ರಲ್ಲಿ 0 ಅಂಕೆ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು.
- 'c' ಹೇಳಿಕೆ ಸಹಾಯ ಪಡುತ್ತದೆ. ಏಕಂದರೆ 7 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ ಅಂದರೆ ಬಹಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೊಲಗಿಸಲು ಸಹಾಯ ಪಡುತ್ತದೆ.
- 'd' ಹೇಳಿಕೆ ಸಹಾಯ ಪಡುತ್ತದೆ. ಏಕಂದರೆ ಇದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದರಿಂದ ಬಹಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೊಲಗಿಸಬಹುದು.
- 'e' ಹೇಳಿಕೆ ಸಹಾಯ ಪಡುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕಂದರೆ 7 ,11 ಅಪವರ್ತ್ಯ 77 ಮಾತ್ರವೆ.ಇದರಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ, ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳು ಸಮ. ಯಾವುದು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಮತ್ತೊಂದು ದೊಡ್ಡದಲ್ಲ.
- 'f' ಹೇಳಿಕೆ ಸಹಾಯ ಪಡುವುದಿಲ್ಲ.
- 'g' ಹೇಳಿಕೆ ಸಹಾಯ ಪಡುತ್ತದೆ. ಏಕಂದರೆ ಇದರಿಂದ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಉಳಿಯುತ್ತವೆ.
- 'h' ಹೇಳಿಕೆ ಸಹಾಯ ಪಡುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ 35 ಮಾತ್ರವೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ - 3, 4, 7 ಮತ್ತು 8ಗಳು ಸಹಾಯಪಡುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 15.3

1. (i) ಇದಕ್ಕೆ ಅವಕಾಶವಾದ ಊಹೆಗಳು :
   a) ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ.
   b) ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಆದರೂ 3 ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
   c) ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

   (ii) ಇದಕ್ಕೆ ಅವಕಾಶವಾದ ಮೂರು ಊಹೆಗಳು :
   a) ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾದರೂ ಯಾವಾಗಲೂ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
   b) ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾದರೂ ಯಾವಾಗಲೂ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
   c) ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾದರೂ ಯಾವಾಗಲೂ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

4. $111111^2 = 12345654321$ $\quad$ $1111111^2 = 1234567654321$
   ಊಹೆ ಸತ್ಯ

6. ಊಹೆ ಅಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ $x = 41$ ಬೆಲೆಗೆ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 15.4

1. (i) ಅಲ್ಲ $\quad$ (ii) ಅಲ್ಲ $\quad$ (iii) ಅಲ್ಲ
   (iv) ಹೌದು $\quad$ (v) ಅಲ್ಲ

2. (i) ಆಯತದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಆದರೆ ಇದು ಚೌಕ ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.
   (ii) $x = 2; y = 3$, ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಹೇಳಿಕೆ ಸತ್ಯವಲ್ಲ.
   ($x = 0; y = 1$ ಅಥವಾ $x = 0, y = 0$ ಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವೆ ಸತ್ಯ)
   (iii) $n = 11$ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $2n^2 + 11 = 253$. ಇದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಚೌಕ ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.
   (iv) ಸಮ ಕೋನಗಳಿಂದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಬಾಹುಗಳು ಬೇರೆಬೇರೆ ಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.
   (v) ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮವೇ ಆದರೆ ಇದು ಚೌಕ ಅಲ್ಲ.

3. x ಮತ್ತು y ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಆದರೇ $x = 2m + 1$ (m ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ) ಯಾಗಿಯೂ, $y = 2n + 1$ (n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ) ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.
   $x + y = 2(m + n + 1)$. ಆದ್ದರಿಂದ , $x + y$ ಎನ್ನುವುದು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಒಂದು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ.

4. $x = 2m$ ಮತ್ತು $y = 2n$ ಆದರೇ
   $$xy = (2m)(2n)$$
   $$= 4\,mn$$

6. (i) ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ n ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ;
   $$n \to 2n \to 2n+9 \to +n = 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7 \to n+7-n = 7$$
   (ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ abc ತೆಗೆದುಕೋ. abc $\times$ $1001 = abcabc$. ಆದ್ದರಿಂದ ಆರಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ $abcabc$ ಯು 7, 11 ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ

ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆ (10 ಗಂಟೆಗಳು)

(i) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(i) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

- ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು - ಪುನರಾವರ್ತನೆ.
- ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳು, ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವುದು.
- ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ಆವರ್ತಿತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶಗಳಾಗಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆರು ದಶಮಾಂಶಗಳವರೆಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
- ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳು
  ಉದಾ : 1.01011011101111—
  1.12112111211112—
  ಮತ್ತು $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ಮೊದಲಾದವು.
- ಅಭಾಗಲಬ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸುವುದು.
- ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸುವುದು.
- ಕರಣಿ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾವನೆ.
- ಏಕಪದ ಕರಣಿ, ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅಕರಣೀಕರಕಗಳು ಮಾಡುವುದು.

ಬೀಜಗಣಿತ (20 ಗಂಟೆಗಳು)

(i) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

(ii) ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

(i) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

- ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ನಿರ್ವಚನೆ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳು, ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯುದಾರಣೆಗಳು, ಪದಗಳು, ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ.
- ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಸ್ಥಿರಾಂಕ, ರೇಖಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗ, ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಗಳು, ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳು, ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳು, ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳು, ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಮೂಲಗಳು ಮತು ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಮತ್ತು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಮೀಕರಣ.
- ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ ನಿರ್ವಚನೆ, ಪ್ರೇರಣೆ, ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ವಿವರಣೆ, ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿನ ಸರೂಪತೆಯಿಂದ ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.
- ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ ನಿರ್ವಚನೆ ಮತ್ತು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವಿಕೆ. ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಇರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಮತ್ತು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸವುವಿಕೆ.

	• ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ. • ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು : $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+x^2+2xy+2yz+2zx$ $(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$ $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ. **(ii) ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು** • ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ. • ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಚಯ. • ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವುದು. • x- ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು. • x-ಅಕ್ಷ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು y- ಅಕ್ಷ ಸಮೀಕರಣ.
ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ **(5 ಗಂಟೆಗಳು)**	**ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ** • ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆ. • ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸುವುದು.
ರೇಖಾಗಣಿತ **(40 ಗಂಟೆಗಳು)** **(i)** ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲಗಳು **(ii)** ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು **(iii)** ತ್ರಿಭುಜಗಳು **(iv)** ಚತುರ್ಭುಜಗಳು **(v)** ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು **(vi)** ವೃತ್ತಗಳು **(vii)** ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ರಚನೆಗಳು	**(i) ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲಗಳು** • ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚರಿತ್ರೆ, ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾವನೆಗಳು, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು, ನಿರ್ವಚನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಗಣಿತ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ 5 ನೇ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಅದರ ತುಲ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳು. • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆ ಏಕೈಕ. • (ಸಾಧನೆ) ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.(ಸಾಧನೆ)

(ii) ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು

- ಒಂದು ಕಿರಣ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180 ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮ (ಪ್ರೇರಣೆ)
- ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಛೇಧಿಸಿಕೊಂಡಾಗ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ (ಸಾಧನೆ)
- ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇಧನ ರೇಖೆ ಖಂಡಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು, ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಅಂತರಕೋನಗಳು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರೇರಣೆ.
- ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾಂತರಗಳು (ಪ್ರೇರಣೆ)
- ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0.(ಸಾಧನೆ)
- ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಾಹುವಿನ ವೃದ್ದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನ ಅದರ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ. (ಪ್ರೇರಣೆ)

(iii) ತ್ರಿಭುಜಗಳು

- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಸರ್ವಸಮತೆ)
- (ಸಾಧನೆ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಸರ್ವಸಮತೆ)
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣ, ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಸಮಾನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮ.
- (ಸಾಧನೆ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಸಮಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ತ್ರಿಭುಜದ ಅಸಮತೆ ಗುಣಗಳು, ಕೋನ, ಅವುಗಳ ಎದುರು ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಸಂಬಂಧ, ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಅಸಮತೆಗಳು.

(iv) ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

- (ಸಾಧನೆ) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕರ್ಣ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರವಾದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾ ಖಂಡವು ಮೂರನೆ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮಕ್ಕೆ ಪ್ರೇರಣೆ.

(v) ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

- ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಭಾವನೆ, ಸಮತಲ ಪ್ರಾಂತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ.
- ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಜ್ಞಪ್ತಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಒಂದೇ ಪಾದ, ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯವಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳು.
- (ಸಾಧನೆ) ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯವಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮ.

(vi) ವೃತ್ತಗಳು

- ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿರ್ವಚನೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ, ವೃತ್ತಪರಿಧಿ, ವ್ಯಾಸ, ಜ್ಯಾ, ಕಂಸ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ.
- (ಸಾಧನೆ) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಮ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮದ ಪ್ರೇರಣೆ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಅದನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಾ ಜ್ಯಾನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆ ಆ ಜ್ಯಾ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td>• (ಪ್ರೇರಣೆ) ಕೊಟ್ಟ ಮೂರು ಏಕ ರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲವು.
• (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ (ಅಥವಾ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತ ಗಳಲ್ಲಿ) ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ
• (ಸಾಧನೆ) ಒಂದು ಕಂಸ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ, ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ್ನಕೆ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.
• (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದಲಿನ ಕೋನಗಳು ಸಮ
• (ಪ್ರೇರಣೆ) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಕಡೆ ಇರುವ ಮತ್ತೆರೆಡು ಬಿಂದುಗಳ ಬಳಿ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದ ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯಗಳು.
• (ಪ್ರೇರಣೆ) ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮ.</td>
</tr>
<tr>
<td>(vii) ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ರಚನೆಗಳು
• ಪಾದ, ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ ಇಲ್ಲವೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಪಾದ ಕೋನಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
• ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಪಾದಕೋನಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
• ದತ್ತ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತ ಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.</td>
</tr>
<tr>
<td>ಕ್ಷೇತ್ರ ಗಣಿತ (15 ಗಂಟೆಗಳು)
(i) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನ ಫಲಗಳು</td>
<td>(i) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು
• ಆಯತ ಘನ, ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು, ಘನಫಲಗಳಪುನರಾವರ್ತನೆ.
• ಸಿಲಿಂಡರ್, ಶಂಕು, ಗೋಳ, ಅರ್ಧಗೋಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು.
• ಸಿಲಿಂಡರ್, ಶಂಕು, ಗೋಳ (ಅರ್ಧಗೋಳ ಸಹ) ಮತ್ತು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಶಂಕುಗಳ ಘನಫಲಗಳು.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಭವನೀಯತೆ (15 ಗಂಟೆಗಳು)
(i) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ
(ii) ಸಂಭವನೀಯತೆ</td>
<td>(i) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ
• ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಮತ್ತು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ.
• ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ, ಬಹುಳಕ (ಭಾರಕ್ಕೆ ಅಂಶಗಳು)</td>
</tr>
<tr>
<td>(ii) ಸಂಭವನೀಯತೆ
• ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕ ಲಭಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅನುಭೂತಿ.
• ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು, ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸುವದರ ಮೂಲಕ ಘಟನೆಯ ಭಾವ.</td>
</tr>
</table>

	• ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ 1 ರಿಂದ 6 ವರೆಗೆ ಸಂಭವಿಸಿದ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಪಟ್ಟಿತಯಾರಿಸುವುದು. • ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಭಾವನೆಯನ್ನು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು, ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸುವುದು. • ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು, ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದುಗಳಂತಹ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಂದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸಾಧಾರಣೀಕರಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದು. • ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ದಾಳಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಭವಿಸುವ ಘಟನೆಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ದೃಶ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು. ಇಂದೇ ವಿಧವಾದ ದಾಳಗಳು ಮತ್ತು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳಿಗೋಸ್ಕರ ಪ್ರೇರಣೆ ಮಾಡುವುದು. • ದೊಡ್ಡ ಸಂಕ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪುನರಾವೃತ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ವಿನಹಾಯಿಸಿನಾಣ್ಯದ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು, ದಾಳಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು.
(i) ಗಣಿತ ಸಾಧನೆಗಳು **(5** ಗಂಟೆಗಳು**)**	(i) **ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಗಳು** • ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳನನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ವಿಧಾನ. • ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತರ್ಕ ನಿಗಮನ ಆಲೋಚನಾ ವಿಧಾನಗಳು. • ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳು, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು. • ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಯ ವಿಧಾನ, ಸಾಧನೆಯ ಹಂತಗಳು.

“

ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು : ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಏನು ಮಾಡಬೇಕು, ಏನನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೋ, ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಆ ತರಗತಿಯ "**ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು**" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಗಣತದಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳ (Contents) ಮೂಲಕ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

1. **ಸಮಸ್ಯ ಸಾಧನೆ :** ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳು, ಪದ್ದತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ ಗಣಿತ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು.

(a) ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಧಗಳು

ಪಜಿಲ್ಸ್, ಪದಬಂಧ ಲೆಕ್ಕಗಳು, ಚಿತ್ರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು, ದತ್ತಾಂಶ ತಿಳಿಯುವಿಕೆ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ – ಕೋಷ್ಟಕಗಳು – ಗ್ರಾಫ್ ಪದ್ದತಿ ಮೂಲಕ ಮಾಡುವ ಮೊದಲಾದ ವಿಧ ವಿಧಗಳಾಗಿ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

(b) ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ – ಹಂತಗಳು

- ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಓದುವುದು.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸುವುದು.
- ಅನುಬಂಧ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಪದ್ದತಿ ಪ್ರಕಾರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

(c) ಸಂಕ್ಲಿಷ್ಟತೆ

ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಂಕ್ಲಿಷ್ಟತೆ ಎನ್ನುವುದು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

- ಅನು ಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು (ಇದು ಅನು ಸಂಧಾನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ)
- ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಂತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
- ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
- ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂದರ್ಭ ಸಮಾಚಾರ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಇದೆ ?
- ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧಿಸುವ ಪದ್ದತಿಯ ಸಹಜತ್ವ

2.ತಾರ್ಕಿಕತೆ – ಋಜು

- ನಾನಾ ವಿಧದ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.
- ಗಣಿತ ಸಾಮನ್ಯೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಊಹಾತ್ಮಕಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ರಚನೆ ಮಾಡುವುದು.

- ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಸರಿನೋಡುವುದು.
- ತಾರ್ಕಿಕ ಚರ್ಚೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.
- ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಸರಿನೋಡುವುದು.
- ತಾರ್ಕಿಕ ಚರ್ಚೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಅನುಗಮನ, ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ವಿನಿಯೋಗಿಸುವುದು.
- ಗಣಿತ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.

3.ತಾರ್ಕಿಕತೆ – ಋಜು

- ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು, ವ್ಯಾಕಗಳನ್ನು ಓದುವುದು – ಬರೆಯುವುದು ,
  ಉದಾ: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $= 180^0$
- ಗಣಿತ ಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸುವುದು.
- ಗಣಿತ ಪರವಾದ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಂತ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದು : ಉದಾ: ಚೌಕ ಎನ್ನುವುದು ನಾಲ್ಕು ಸಮಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಕೋನಗಳಿರುವ ಸಂವೃತ ಚಿತ್ರ.
- ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು ಉದಾ : ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ನಂತರ ಹತ್ತಿರ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದು/ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಗಣಿತ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.

4.ಸಂಬಂಧ / ಅನುಸಂಧಾನ

- ಅನುಬಂಧ ಗಣಿತ, ಪಾಠ್ಯ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು – ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು . ಉದಾ : ಗುಣಾಕಾರ, ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ, ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿನ ಭಾಗಕ್ಕೆ – ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ –ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ, ವಿನ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ – ಸಮಿಮಿತಿಗಳಿಗೆ ; ಅಳತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಮತಲಗಳು /ಅಂತರಾಳ.
- ದೈನಂದಿನ ಜೀವನಕ್ಕೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು.
- ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು.
- ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅನು ಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು. ಉದಾ:ದತ್ತಾಂಶದದ ಶೇಖರಣೆ ಮತ್ತು ಅಂಕಗಣಿತ ; ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರದೇಶ.
- ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಬಹಳ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು .

5.ದೃಶ್ಯೀಕರಣ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿನಿಧಿತ್ವ.

- ಪಟ್ಟಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ, ರೇಖಾ ಚಿತ್ರ ಆಯತ ಚಿತ್ರ 2-Dಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು 3-D ಆಕೃತಿಗಳು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಓದುವುದು.
- ಪಟ್ಟಿಕೆಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸುವುದು, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವುದು. ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳು,, ಆಯತಚಿತ್ರಗಳನ್ನು, ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು.
- ಗಣಿತದ ಚಿತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳು